现代数学书丛

李群的表示论

黄劲松 著

ODERN ATHEMATICS

MM

湖 南 教 育 出 版 社



ISBN 7－5355－3227－6/G・3222
定价：9.00 元

现代数学书丛

李群的表示论

黄劲松 著

湖南教育出版社

李群的表示论

黄劲松　著

责任编辑：郑绍辉

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷三厂印刷

787×1092　32 开　印张：6.25　字数：148900

2000 年 7 月第 1 版　2000 年 7 月第 1 次印刷

印数：1—1000

ISBN 7－5355－3227－6/G·3222

定价：9.00 元



作 者 简 介

黄劲松，1962年生于黄河之畔的泉城济南。1980年由山东省实验中学考入北京大学数学系，1984年获数学学士学位。翌年，获王安奖学金赴麻省理工学院(MIT)数学系，1989年获数学哲学博士学位。他先后在普林斯顿高等研究院(IAS)与犹他大学（University of Utah）任职，从事研究与教学工作，现为香港科技大学终身教授，其研究领域为李群的表示论与非交换调和分析。

序

科学技术是第一生产力．经济发展必须有科学技术的支持.特别是进入21世纪后,科技的进步更将成为经济发展的主要动力．其中基础性的创新研究,将使经济出现飞跃式的进展,这已为过去的历史所证明,并已成为全世界有识之士的共识．对我国来说,科技兴国,已是当务之急,这些也已成为全国有识之士的共识．

数学作为一门基础学科,向来被认为是基础的基础．数学主要研究数量关系与空间形式,也通过数量关系与空间形式而渗透到种种各别的科学领域,一门科学的成熟程度,往往以应用数学的深入程度为一项重要衡量标志．在进入21世纪时,数学如何发挥它应有的作用,以支持并促进我国科技的进步与经济的发展,乃是一项重大的课题．为此,必须有一批优秀的跨世纪中青年数学人才作为主力,才能担负起这一重大责任．国家为此已为青年数学家创造了种种良好的研究条件和学术环境,设立了各种特殊的基金与资助,还举办了种种类型旨在培养与选拔拔尖人才的讲习班、暑期学校与研究班等．

早在若干年以前,在国际著名数学家陈省身教授的倡导之下,国家教委与国家基金委曾在天元基金的支持之下,乘每年暑期各大专院校休假之机,举办数学上各种专题的讲习班;此后又升级并改名为暑期学校．第一次1995年在湖北襄樊地区举行,

由武汉大学数学系主持其事,第二次1996年改在北京,由北大数学系主持,以后将转往其他地区,由一些著名的大学数学系轮流主持. 这些暑期学校都主要由国内外卓有成就的中青年数学家就当前某些有重要意义的活跃领域作系统介绍,使参加学习的来自全国各地的年轻学子能迅速了解这些领域的情况,掌握它们的方法技术,并进入科研前沿.

湖南教育出版社热心中国数学事业的发展,提出由该社组织编辑一套《现代数学》书丛,大部分暑期学校的讲稿经过适当增改后都将收入这一书丛,第一批包括三本:

1. 堵丁柱的《判定树理论导引》;

2. 石赫的《机械化数学引论》;

3. 张贤科的《代数数论导引》.

以后还将陆续分批出书,已定的有:

香港科技大学黄劲松的《李群的表示论》.

其余也在计划之中.

现试对此次出版的第一批的三本书略作介绍:

《判定树理论导引》一书的作者堵丁柱教授是我国著名的青年数学家,他解决了美国贝尔电话公司关于电话布线有关Steines树精测长期悬而未决的问题,并因此而被英国大百科全书列为当年十大科技成就之一. 此书则涉及作者有着重要成就的另一领域:理论计算机科学中的计算复杂度理论. 所谓Karp猜想的提出者Karp是这一理论的主要开创者之一,它引导到迄今还成为悬案的所谓P—NP问题. 本书作者"将心比心"与"设身处地"深入浅出地介绍这一猜想,并如作者所希望的那样,这一猜想的解决可能会出自于阅读这本小册子的青年学子之手.

数学中的公理化演绎体系几乎是尽人皆知的,20世纪重大发明之一的计算机,使数学面临变革而有进入一个新时代的可

能,即数学的机械化.计算机科学大师 Knuth 曾称计算机科学是一种算法的科学.我国某些数学史家曾论证数学发展的历史过程中,公理化的演绎倾向与机械化的算法倾向往往互为消长交替成为当时数学的主流.由于计算机的出现,为后一倾向带来了新的生命力.丛书的第二本对于数学机械化作了较详细的介绍,作者石赫教授是中国科学院系统科学所的研究员,多年来从事这方面的研究,有过不少重要的贡献.例如书中关于理论物理中杨振宁与 Baxter 方程组的解法,即是石赫教授自己的一项杰作,希望读者在阅读本书之后,能迅速进入这一方兴未艾的新颖领域,并作出多方面的贡献.

数论,它的研究对象始于最简单不过的整数,却有着最丰富不过的内涵.早在古希腊时期,欧几里得的《几何原本》一书,就有专章通过素数概念以及素数积惟一分解与素数个数无限等定理创立了朴素而诱人的整数理论.在中国古代,虽然整数的性质理论并非主要贯注所在,也有中国剩余定理这种光辉篇章,到近代的几个世纪,整数的理论往往吸引着许多伟大的数学家,诸如 Fermat, Euler, Gauss, Riemann, Jacobi, Dirichlet 等,他们的贡献使数论成为数学中最有魅力的一个分支,著名的难题如 Goldbach 问题, Fermat 大问题,以及 Riemann 猜测等,已成为数百年来许多大数学家所殚精竭虑的焦点.在本世纪中,由于诸如编码等实际上的需要,使数论除了本身理论的优美以外,还成为解决实际问题的一种重要手段.

在本世纪中,由于数学中代数、拓扑、分析等多方面的发展对数论引进了诸多新的手段,经过数代人的努力,终于使 Fermat 大问题得到完全解决,至于在我国,则通过华罗庚、闵嗣鹤等诸前辈的倡导,出现了一批优秀的数论专家,以陈景润等为代表,在 Goldbach 问题上作出了卓越的贡献,为国外所推崇.《代

数数论导引》一书的作者张贤科是清华大学的教授，长期从事代数数论的研究，作出过不少重要的贡献．此书从现代数学的角度介绍了代数数论的基本内容和类域论等很重要的现代理论．国内有志于数论的青年学子，尽可通过此书发愤学习而成才，迅速进入数论这一领域，并在21世纪中与国外学者争奇斗胜．

我们希望书丛中以后出版的著作，能对国内的青年学者，起到同样的作用．

吴文俊

1998年1月22日

前　言

本书是在南开举办的全国数学暑期学校英文讲稿的基础上删简整理而成．在南开大学开设“李群的表示论”课程的目的是向在读的研究生介绍李群、李代数及其表示论的基础知识和一些最新的研究课题．

当人类迈向21世纪之际，数学在当今社会的作用日益受到重视．数学处于所有科学的核心，因为所有的科学分支都需要数学来阐明其真理．在数学之中群的对称性又是被视为灵魂的部分．表示论是用线性代数来研究群对称的基本工具．群对称遍及数学的各个分支：几何、分析和代数．表示论在当今数学和理论物理的发展上起了十分重要的作用．本世纪著名的数学家I.Gerfand曾经说过：“所有的数学都可视作某种表示理论．”

A.Einstein曾经说过：“所有科学理论应该尽量地简化，直到不能再简化为止．”这一点对数学理论来说尤其重要．因此，在编写本书时我们只假定读者具备完整的线性代数知识和一些基本的抽象代数知识．为了使读者容易理解，我们大致把本书分为四个部分：Ⅰ．有限群；Ⅱ．李代数；Ⅲ．紧李群；Ⅳ．非紧李群．每一部分又分为三章，第1章介绍结构理论，第2章介绍基本的表示理论，第3章介绍比较专门化的理论或应用．

本书前三部分所包括的都是表示论中比较基础的理论．这些理论可视为线性代数的延拓与应用，这部分内容在数学和物理的许多领域中都有广泛的应用．本书着重于介绍表示论的基本思想，而不是给出最完备的证明．完备的证明可以在书中列出的参考文献中找到．第一部分只涉及有限群，并不需要李群的知识．第二部分是关于复单李群的结构与表示理论．第三部分概括了紧李群的表示与一些应用，这部分的最后一章包括了将典型群表示的 Weyl 构造推广至非典型群，这一项工作是新的研究成果．第四部分包含了非紧李群的无限维表示的一些基本理论．这部分内容在表示论中一般被视为是比较高深的．我们采用最典型的例子 $SL(2,\mathbb{R})$ 的表示作为介绍．我们还包括了幂零伴随轨道和极小表示的理论．在南开暑期学校我们还介绍了一般实线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 和它的通用覆盖群 $\widetilde{GL}(n,\mathbb{R})$ 的不可约酉表示的完全分类以及它们酉表示特征之间的关系．在我看来，这是表示论中十分精彩的部分．但是这部分内容并没有写进本书，原因是使这本表示论的入门书不致过长．有兴趣的读者可参阅以下三篇文献[V2]，[H1]和[AH]．在本书的最后一章，我们介绍了轨道方法、极小表示和对偶对的对应，这些理论在表示论中是举足轻重的．

D.Hilbert 在 1900 年的国际数学家大会曾断言："一个数学理论如果不能向你在大街上碰到的第一个人解释清楚，那么这个理论将会被认为是不完备的．"如此看来，表示论还处在不完备而且是正蓬勃发展的阶段．它将吸引许多年轻的数学家在这个领域内进行广泛地研究．可以预言，21 世纪将是表示论继续蓬勃发展的时代．

最后，我希望能借此机会向南开大学和南开数学研究所的数学家尤其是侯自新、周兴伟和梁科三位教授的款待表示衷心

的感谢，同时我也想对湖南教育出版社的郑绍辉先生与孟实华女士的帮助表示由衷的谢意。

黄劲松
1999年12月于
香港九龙清水湾
香港科技大学

目　录

第一章　有限群

§1.1　群的概念

一个群是在一个集合 G 上定义了一种代数运算(称为乘法)使得 G 中任意二个元素 g_1 和 g_2 对应于 G 中另一个元素 g_1g_2. 这种运算需要满足下列条件:

(i)结合律:$(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3)$, $\forall g_1,g_2,g_3\in G$;

(ii)存在单位元:G 中含有一个元素 e,使得对所有的元素 $g\in G$ 都有 $ge=eg=g$;

(iii)存在逆元素:对 G 中任意一个元素 g,存在一个元素 g^{-1}使得 $gg^{-1}=g^{-1}g=e$.

注　1) 单位元素是惟一的. 假设还存在一个单位元素 $e'\in G$,那么就有

$$e'=e'e=e.$$

2)给定一个元素 $g\in G$,那么 g 的逆元素也是惟一的. 假设 x 和 y 同为 g 的逆元素,那么就有

$$x=xe=x(gy)=(xg)y=ey=y.$$

例　1) 所有整数组成的集合$\mathbb{Z}$,所有有理数组成的集合$\mathbb{Q}$,所有实数组成的集合$\mathbb{R}$ 以及所有复数组成的集合$\mathbb{C}$ 在通常加法

的运算下都是群.

2) 所有非零的有理数组成的集合$\mathbb{Q}^\times$,所有非零的实数组成的集合$\mathbb{R}^\times$以及所有非零的复数组成的集合$\mathbb{C}^\times$在通常定义的乘法的运算下都是群.

3) 假设 V 是定义在域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间(本书中我们只用到实的或复的线性空间),那么 V 上所有可逆的线性变换 $GL(V)$组成一个群. 这里涉及的代数运算就是线性变换的合成. 如果我们选定 V 上的一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$,那么 $GL(V)$可以等同与所有可逆的 $n \times n$ 矩阵 $GL(n, \mathbb{F})$.

一个群被称为是交换群,如果 G 中任意二个元素 g_1, g_2 都满足 $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

例 1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 都是交换群.

2) $\mathbb{Q}^\times, \mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$ 都是交换群.

3) $GL(n, \mathbb{F})$只有在 $n=1$ 时才是交换群.

一个群 G 中的子集 H 被称为子群,如果 H 在 G 中定义的运算下组成一个群.

例 1) 如果 n 是一个整数,那么$\mathbb{Z}$中子集

$$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

组成$\mathbb{Z}$的一个子群.

2) 所有行列式为 1 的矩阵 $SL(n, \mathbb{F})$是 $GL(n, \mathbb{F})$的一个子群.

给定一个群 G. 我们在这里给出一类抽象子群的定义. 这是由 G 中某一个元素 x 生成的循环群. 由 x 生成的循环群 H 是由 x 的所有幂组成的集合,也就是

$$H = \{\cdots, x^{-2}, x^{-1}, e, x, x^2, \cdots\}.$$

这里 x 的 n 次幂 x^n 是指 x 自乘 n 次(假定 $n>0$). x^{-n}是指 x^{-1}自乘 n 次. H 是 G 中包含 x 的极小子群.

3）四元数群 H 是由下列 8 个矩阵组成

$$H=\{\pm\mathbb{I},\pm\mathbb{i},\pm\mathbb{j},\pm\mathbb{k}\}.$$

H 是 $GL(2,\mathbb{C})$的一个子群．这里四元数群定义如下：

$$\mathbb{I}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\mathbb{i}=\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix},\mathbb{j}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\mathbb{k}=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}.$$

用矩阵的乘法不难得出

$$\mathbb{i}^2=\mathbb{j}^2=\mathbb{k}^2=-\mathbb{I},\ \mathbb{i}\mathbb{j}=-\mathbb{j}\mathbb{i}=\mathbb{k},$$

$$\mathbb{j}\mathbb{k}=-\mathbb{k}\mathbb{j}=\mathbb{i},\ \mathbb{k}\mathbb{i}=-\mathbb{i}\mathbb{k}=\mathbb{j},$$

显然，$\mathbb{I}$ 是 H 中的单位元素．

§1.2 群在集合上的作用

在数学史上变换群的概念早于一般的群的概念．人们正是在对变换群认识与了解的基础上提出了更一般的抽象的群的概念．在数学与物理的许多领域中群往往也是以变换群的面目出现的．

一个定义在集合 X 上的变换是一个 X 到 X 自身的一对一映射 f，也就是说存在一个映射 $f^{-1}:X\to X$，满足 $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=e$ 恒等映射．如果 f 和 g 都是 X 到自身的映射，我们就用 $f\circ g$ 表示这两个映射的复合．

一个变换群 G 是由在某个集合 X 上的一些变换组成的集合．它必须满足 G 中含有恒等映射 e，G 含有每一元集的逆映射，而且 G 中任意二个映射的复合也都是 G 中的元素．在这些条件下，不难看出变换群是一个我们在§1.1 中定义的群．我们把由 X 上所有变换组成的群称作 X 上的对称群，记作 Sym X．

特别地,如果 X 含有 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,我们把 Sym$X$ 记作 S_n,并称其为 n 个元素的对称群.

如果 $\varphi:G_1\to G_2$ 是由群 G_1 到群 G_2 的一一对应而且满足对 G 中任意二个元素 g_1,g_2 都有 $\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2)$,那么我们称 φ 为 G_1 到 G_2 的一个同构,并称 G_1 与 G_2 同构.

定理 (Cayley)任意一个群同构于某一个变换群.

证明 我们设法构造一个群 G 到在集合 G 上定义的变换群的同构. 给定 G 中一个元素 g,我们定义一个映射

$$T_g:G\to G,\ x\mapsto gx\ .$$

我们先证明由所有 T_g 组成的集合 T_G 是一个变换群. 我们有下列关系式:

$$Te:x\mapsto ex=x;$$

$$T_gT_{g^{-1}}:x\mapsto g(g^{-1}x)=x,\ T_{g^{-1}}T_g:x\mapsto g^{-1}(gx)=x;$$

$$T_aT_b:x\mapsto a(bx)=(ab)x,\ T_{ab}:x\mapsto(ab)x\ .$$

由此得到:T_e 是恒等映射,T_G 中任何一个映射都有逆,而且任何二个映射的复合也在 T_G 中. 根据定义,T_G 是一个变换群. 我们再来证明以下定义的映射

$$\varphi:G\longrightarrow T_G,\ g\mapsto T_g$$

是 G 到 T_G 的一个同构. 显然我们有 φ 是一个满射. 如果 $T_a=T_b$,那么 $a=T_a(e)=T_b(e)=b$. 也就是说 φ 也是一个单射. 因为我们有 $T_aT_b=T_{ab}$,所以 $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$. 由此得到 φ 是一个群同构.

一个由群 G_1 到群 G_2 的同态定义为一个映射

$$\varphi:G_1\longrightarrow G_2,$$

满足以下条件:

对 G_1 中任意二个元素 g_1,g_2 都有

$$\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2).$$

我们称一个从群 G 到变换群 Sym$X$ 的同态 T 为 G 在集合 X 上的作用．确切地说，对任意 G 中的一个元素 g，$T(g)$ 都是 X 上的一个变换．我们通常将 $T(g)x$ 简记为 $g\cdot x$ ．G 在集合 X 上的作用也可理解为对 G 中任意一个元素和 X 中任意一个元素，我们指定 X 中一个元素 $g\cdot x$，并满足以下条件：

(i) $e\cdot x=x$；

(ii) $(g_1g_2)\cdot x=g_1\cdot(g_2\cdot x)$.

例 我们有以下群 G 在自身上作用的三个实例：

1) $g\cdot x=gx$；

2) $g\cdot x=xg^{-1}$；

3) $g\cdot x=gxg^{-1}$.

在以上三个等式中，左边指群 G 的作用，右边是 G 中的乘法运算．以上三种 G 的作用分别称为左正则作用、右正则作用和伴随作用．请注意 $g\cdot x=xg$ 并不能定义一个群 G 在 G 上的作用，除非 G 是交换群.

我们称群 G 在二个集合 X 和 X' 的作用是等价的，如果存在一个 X 到 X' 的一一对应，使得由 $x\leftrightarrow x'$ 可以得到 $g\cdot x\leftrightarrow g\cdot x'$.

例 左正则作用和右正则作用是等价的．以下映射 $x\leftrightarrow x^{-1}$ 给定所需要的一一对应.

§1.3 有限群

如果一个群 G 只含有有限个元素，那么我们就称 G 为有限群．G 中元素的个数称为 G 的阶，记为 $|G|$．作为 Cayley 定

理的一个特例,我们有以下命题:

命题 任何一个有限群都同构于某个对称群 S_n 的子群.

给定一个群 G 在一个集合 X 上的作用. 对 $x\in X$ 我们称

$$O_x=\{g\cdot x\mid g\in G\}$$

为由 x 生成的轨道. 如果我们把 G 在 X 上的作用限制在一个子群 H 上,那么我们自然地得到一个 H 在 X 上的作用. 特别地,我们可以考虑子群 H 在群 G 上的左正则作用. 由这种作用生成的 H—轨道称为 H 的右陪集. 也就是说,H 的右陪集是$\{hg\mid h\in H\}$这样的集合,我们把它记为 Hg . 同样我们可以考虑右正则作用,由此所得到的轨道是 H 的左陪集,记为 gH . 群 G 是许多左陪集的不相交的并集,这些不相交的并集的个数被称作 H 在 G 中的指标,记为$[G:H]$. 假定 G 是有限群,那么

$$|G|=|H|[G:H].$$

特别地,$|H|$可以整除$|G|$.

群 G 的一个子群 H 称为正规子群,如果对任意 $g\in G$,都有

$$gHg^{-1}\subseteq H .$$

我们称群 G 为单群,如果只有$\{e\}$和 G 是它的正规子群.

例 1) 在交换群中,只有阶数为素数的循环群是单群.

2) 当 $n\geqslant 5$ 时,由所有偶置换生成的 S_n 的子群 A_n 是一个单群. (若读者从未见到过 A_n 的定义,可参阅§3.1)

有限单群可以看作是构成所有有限群的生成单位. 任意一个有限群都是由某些单群扩张生成.

如果 N 是 G 的正规子群,那么它的一个左陪集 gN 也是一个右陪集 Ng . 在这种情况下,我们可以定义左陪集的乘法. 这个乘法的定义是与 G 的左陪集分解和谐对应的. 也就是说

如果 g_1 和 g_1' 在同一陪集中，g_2 和 g_2' 在同一陪集中，那么 g_1g_2 和 $g_1'g_2'$ 也在同一陪集中．在这个定义下，

$$(g_1N)(g_2N)=(g_1g_2)N,$$

所有左陪集组成一个群，我们称之为商群，记为 G/N．我们称下列由 G 到其商群的映射

$$\varphi: G \longrightarrow G/N, g \mapsto gN$$

为自然同态．

例 1）交换群的子群都是正规子群．特别地，$n\mathbb{Z}$ 是$\mathbb{Z}$ 的正规子群．由此所到的商群$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是阶数为 n 的循环群．

2）特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R})$是一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$的正规子群．商群 $GL(n,\mathbb{R}/SL(n,\mathbb{R}))$同构于$\mathbb{R}^{\times}$．

同态定理 设 φ 是从G 到G'的同态映射．映射的核 $\mathrm{Ker}\varphi=\{g\in G\mid \varphi(g)=e'\}$是 G 的正规子群．映射的像 $\mathrm{Im}\varphi=\{x\in G'\mid$存在 $g\in G$ 使得$x=\phi(g)\}$是 G'的一个子群．我们有以下群同构

$$G/\mathrm{Ker}\varphi\cong\mathrm{Im}\varphi\ .$$

证明 假设 $x\in\mathrm{Ker}\varphi$，那么

$$\begin{aligned}\varphi(gxg^{-1})&=\varphi(g)\varphi(x)\varphi(g^{-1})\\&=\varphi(g)e'\varphi(g^{-1})\\&=\varphi(g)\varphi(g^{-1})\\&=\varphi(e)=e'.\end{aligned}$$

所以我们得到 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是G 的正规子群．假设 $x'=\varphi(x)$，$y'=\varphi(y)$，那么，$x'y'=\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)$．因此 $\mathrm{Im}\varphi$ 中任意二个元素的乘积仍然在 $\mathrm{Im}\varphi$ 中．同时我们还有 $e'=\varphi(e)$，$\varphi(x)^{-1}=\varphi(x^{-1})$都在 $\mathrm{Im}\varphi$ 中．由此得出，$\mathrm{Im}\varphi$ 是G'中子群，现在定义

$$\overline{\varphi}: G/\mathrm{Ker}\varphi_1\rightarrow\mathrm{Im}\varphi, g\mathrm{Ker}\varphi\mapsto\varphi(g).$$

这个映射是一一对应,并且满足$\overline{\varphi}(g_1g_2)=\overline{\varphi}(g_1)\overline{\varphi}(g_2)$. 所以,$\overline{\varphi}$是群同构.

注 1) 所有的群同态 φ 都可化为自然同态和一个群同构的复合,也就是$\overline{\varphi}: G/\mathrm{Ker}\varphi \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}\varphi$ 与 $\varphi': G \to G/\mathrm{Ker}\varphi$ 的复合.

2) 我们在这里指出同态定理对无限群和有限群都成立.

第二章　有限群的表示

§2.1　群的表示

设 G 为有限群．群 G 在一个复线性空间 V 上的表示 π 是一个群同态，

$$\pi: G \to GL(V).$$

群 G 的表示 π 也常常称为 G—模(或 G 模)．群 G 的二个表示 $\pi: G \to GL(V)$ 和 $\pi': G \to GL(V')$ 称为是等价的，如果存在一个线性空间的同构 $T: V \to V'$，使得

$$\pi'(g)T(v) = T(\pi(g)v)$$

对所有的 $g \in G$ 和 $v \in V$ 都成立．

一个 G 的表示 (π, V) 称为是不可约的，如果 V 没有非平凡的 G 不变子空间．下面的 Schur 引理在表示论常常用到．

Schur 引理　假设 $\pi: G \to GL(V)$ 与 $\pi': G \to GL(V')$ 为群 G 的二个不可约表示．如果存在一个线性变换 $T: V \to V'$ 满足

$$\pi'(g)T(v) = T(\pi(g)v), \forall g \in G, v \in V,$$

那么 T 一定为零映射或者为线性空间同构．

再者，若有 $V = V'$，那么 T 一定是一个数乘线性变换．

证明　因为 $\mathrm{Ker}T$ 与 $\mathrm{Im}T$ 都是 G 不变子空间，所以只有两

种可能：其一是 $\mathrm{Ker}T=V$，也就是 T 为零映射；其二是 $\mathrm{Ker}T=0$，也就是 T 为单一的线性变换，同时 $\mathrm{Im}T\neq 0$，由于有不可约性，必有 $\mathrm{Im}T=V'$，由此得到 T 又是满射，又单又满的 T 必为线性空间的同构.

为了证明引理的第二部分，我们考虑以下从 V 到自身的线性变换 $T'=T-\lambda\mathbb{I}$. 这里的 λ 是 T 的一个特征值. 显然我们有

$$\pi'(g)T'(v)=T'(\pi(g)v),\ \forall g\in G, v\in V,$$

因为 $\mathrm{Ker}T'\neq 0$，所以 T' 不可能为同构. 我们利用已经证明了的引理的第一部分得到，$T'=0$，也就是 $T=\lambda\mathbb{I}$.

群 G 的表示 (π,V) 称为酉表示，如果 V 上存在一个 G 不变的正定 Hermitian 形式，也就是说 V 上有一个正定 Hermitian 形式 $\langle,\rangle$ 满足对任意 $g\in G$ 和任意 $u,v\in V$，都有

$$\langle \pi(g)u,\pi(g)v\rangle=\langle u,v\rangle.$$

定理 设 (π,V) 是有限群 G 的一个表示. 那么 V 上一定存在一个 G 不变的正定 Hermitian 形式. 也就是说 V 一定是一个酉表示.

证明 作为一个线性空间，V 上一定可以定义一个正定的 Hermitian 形式 $\{,\}$. 我们将利用这个 Hermitian 形式得到一个 G 不变的 Hermitian 形式. 现在我们定义：

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\{\pi(g)u,\pi(g)v\}.$$

新定义的形式 $\langle,\rangle$ 仍然是正定的 Hermitian 型. 我们必须证明这个形式是 G 不变的. 设 g_0 为 G 中任意一个元素，

$$\langle \pi(g_0)u,\pi(g_0)v\rangle$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\{\pi(g)\pi(g_0)u,\pi(g)\pi(g_0)v\}.$$

因为右乘一个固定元素 g_0 是 G 到自身的一一映射，所以当 g

遍历 G 中所有元素的同时也有 gg_0 遍历 G 中所有元素．我们可以用 g' 取代 gg_0，也就是让 g' 遍历 G 中所有元素．由此得到，

$$
\begin{aligned}
\langle \pi(g_0)u, \pi(g_0)v \rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\{\pi(g)\pi(g_0)u, \pi(g)\pi(g_0)v\} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G}\{\pi(g')u, \pi(g')v\} \\
&= \langle u, v\rangle .
\end{aligned}
$$

这就证明了 Hermitian 型(,)的 G 不变性，所以 V 是一个酉表示．

设(π, V)与(π', V')为 G 的两个表示．我们定义其直和 $V\oplus V'$ 为 G 的又一表示，对 $v\in V$，$v'\in V$，G 的作用可以写为：

$$g(v+v') = \pi(g)v + \pi'(g)v' .$$

命题 设(π, V)为 G 的一个酉表示．如果 W 是一个 G 不变子空间，那么其正交补 $W^{\perp}$ 也是一个 G 不变子空间，并且 V 可以分解为 W 与 $W^{\perp}$ 两个子表示的直和．

证明 设 $v\in W^{\perp}$．那么对任意 $W\in W$ 和任意 $g\in G$，都有

$$\langle v, w\rangle = \langle \pi(g)v, \pi(g)w\rangle = \langle v, w\rangle = 0 .$$

也就是 $\pi(g)v\perp\pi(g)W$．因为 π 为酉表示，对任意 $g\in G$，都有 $\pi(g)W = W$．因此 $\pi(g)v\perp W$，也就是 $W^{\perp}$ 是 G 不变子空间．由线性代数的知识我们知道有以下线性空间的分解

$$V = W\oplus W^{\perp} .$$

推论 任意一个有限群 G 的酉表示都是不可约表示的直和．

§2.2 表示的特征

群 G 的表示(π,V)的特征是一个映射 $\chi:G\to\mathbb{C}$,定义为

$$\chi(g)=\text{trace }\pi(g).$$

如果固定 V 的一组基,假设 $\pi(g)$的特征根是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,那么

$$\chi(g)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n\ .$$

请注意这个定义与基的选取无关. 因为换了一组基,$\pi(g)$的特征根保持不变.

例 设 $H=\{\pm\mathbb{1},\pm\mathbb{i},\pm\mathbb{j},\pm\mathbb{k}\}$为§1.1 中定义四元数群. 这是由8个 2×2 矩阵组成的群. H 到 $GL(2,\mathbb{C})$中的嵌入给出一个 H 的自然表示π,这是一个二维的表示,其特征为

$$\chi(\pm\mathbb{1})=\pm\text{trace }\mathbb{1}=\pm\text{trace}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\pm2,$$

$$\chi(\pm\mathbb{i})=\pm\text{trace }\mathbb{i}=\pm\text{trace}\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix}=0,$$

$$\chi(\pm\mathbb{j})=\pm\text{trace }\mathbb{j}=\pm\text{trace}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=0,$$

$$\chi(\pm\mathbb{k})=\pm\text{trace }\mathbb{k}=\pm\text{trace}\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}=0\ .$$

设(π,V)为 G 的表示,我们定义其对偶表示(π^*,V^*)如下:V^*是线性空间 V 的对偶空间,G 在V^*上的作用由下列公式给出:

$$\langle v,\pi^*(g)v^*\rangle=\langle\pi(g^{-1})v,v^*\rangle.$$

如果(π,V)和(π',V')为 G 的二个表示,那么他们的张量积

$V\otimes V'$也可定义为G的表示．G在$V\otimes V'$上的作用由下列公式给出：

$$g(v\otimes v')=\pi(g)v\otimes\pi'(g)v'.$$

命题 设χ_V为群G表示的特征．那么

(i) $\chi_V(e)$等于V的维数；

(ii) $\chi_V(g)=\chi_V(hgh^{-1}),\forall g,h\in G$；

(iii) $\chi_{V^*}(g)=\chi_V(g^{-1})=\overline{\chi_V(g)},\forall g\in G$；

(iv) 设$\chi_{V'}$为G的另一表示(π',v')的特征，那么$v\oplus v'$的特征为$\chi_V+\chi_{V'}$；

(v) $V\otimes V'$的特征为$\chi_V\cdot\chi_{V'}$．

证明 我们不妨固定V的一组基并把$\pi(g)$对应为在这组基下的矩阵．因为$\chi_V(e)=\mathrm{trace}I=\dim V$，所以我们得到公式(i)．因为$\pi(hgh^{-1})=\pi(h)\pi(g)\pi(h)^{-1}$，所以$\mathrm{trace}\pi(hgh^{-1})=\mathrm{trace}\pi(h)\pi(g)\pi(h)^{-1}=\mathrm{trace}\pi(g)$，这就证明了公式(ii)．因为$\pi^*(g)$对应的矩阵是$\pi(g)$对应矩阵的转置的逆矩阵，所以其特征值等于$\pi(g^{-1})$的特征值．由于$\pi(g^{-1})=\pi(g)^{-1}$，所以如果$\pi(g)$的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，那么$\pi(g^{-1})$的特征值为$\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$．因此，

$$\chi_V(g^{-1})=\lambda_1^{-1}+\cdots+\lambda_n^{-1}=\overline{\lambda}_1+\cdots+\overline{\lambda}_n=\overline{\chi_V(g)}.$$

在这里我们用到了G是有限群的条件．因为G为有限群，所以G中任意元素g都为有限阶，也就是存在某个正整数m，使得$g^m=e$．由此得到$\pi(g)^m=I$单位矩阵，所以$\lambda_i^m=1$．这也就证明了$|\lambda_i|=1$，因此$\lambda_i^{-1}=\overline{\lambda}_i$，这就完成了公式(iii)的证明．为了证明公式(iv)和(v)，我们固定V'的一组基，设$\pi(g)$的特征值为$\mu_1,\cdots,\mu_m$．因此$(\pi\oplus\pi')(g)$的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\mu_1,\cdots,\mu_m$，$(\pi\otimes\pi')(g)$的特征值为$\lambda_i\mu_j(i=1,\cdots,n,j=1,$

$\cdots, m)$.所以我们得到

$$\chi_{V\oplus V'}(g)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n+\mu_1+\cdots+\mu_m=\chi_V(g)+\chi_{V'}(g);$$

$$\chi_{V\oplus V'}(g)=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j=(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(\mu_1+\cdots+\mu_m)$$

$=\chi_V(g)\chi_{V'}(g)$. 这就完成了命题的证明.

一个定义在 G 的复数值函数 $\varphi: G\to\mathbb{C}$ 被称为类函数,如果 φ 在 G 的每一个共轭类上都取相同的值. 类函数可以当作是定义在共轭类的函数. 我们从上面命题中公式(iii)得出,表示的特征都是类函数. 我们同时在 G 上所有复数值函数的空间上定义一个 Hermitian 内积:

$$\langle\chi,\chi'\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}\chi'(g).$$

这个内积在表示论的特征理论中十分重要.

§2.3 不可约表示

我们现在来讨论有限群表示特征理论中最重要的定理. 这个定理不仅在其数学内涵上十分优雅,而且是一个作为有限群不可约表示完全分类的有力工具.

定理 设群 G 的阶为 N. 如果 $\pi_1,\pi_2,\cdots$是 G 的所有不可约表示,我们用 $\chi_1,\chi_2,\cdots$来代表他们的特征,那么

(i) 所有的不可约表示的特征$\{\chi_i\}$组成它所生成的线性空间的一组标准正交基. 也就是说,$\langle\chi_i,\chi_j\rangle=\delta_{ij}$.

(ii) 所有不可约表示的特征是类函数的一组标准正交基. 由此得到不可约表示的个数等于 G 的共轭类的个数.

(iii) 设 d_i 为不可约表示 π_i 的维数．设 r 为所有不可约表示的个数．那么

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_r^2 = N .$$

注 其实每个不可约表示的维数 d_i 都可整除 G 的阶 N ．我们不在这里给出这条性质的证明．读者可以在[J]的第二卷中找到证明．在我们证明定理之前,先给出几个推论．

推论 1 G 的任何一个表示(π, v)由其特征完全确定．利用§2.1 中的推论,我们先将 V 分解为不可约表示的直和

$$V = n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \cdots \oplus n_r Vr,$$

那么不可约表示 V_i 在 V 中出现的次数 $n_i = \langle \chi, \chi_i \rangle$.

证明 V 的特征等于 $\chi = n_1\chi_1 + \cdots + n_r\chi_r$.这个推论可以用定理的性质(i)推出．

推论 2 一个 G 的表示(π, V)是不可约的当且仅当它的特征 χ 满足以下条件:$\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

证明 任何一个表示都是不可约表示的直和．设 $V = n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_r V_r$,那么 $\chi = n_1\chi_1 + \cdots + n_r\chi_r$ ．由此得到

$$\langle \chi, \chi \rangle = n_1^2 + \cdots + n_r^2 .$$

$\langle \chi, \chi \rangle = 1$ 当且仅当某个 n_i 为 1 其他 n_i 为 0,亦即当且仅当 V 不可约．

我们在本节其余部分给出上面定理的证明．

定理中性质(i)的证明　我们先来证明不可约表示的特征满足$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$．对于 G 的任何一个表示(π, V),我们把$\pi(g)V$简记为 gV ．定义

$$\varphi: \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g \in \mathrm{End}(V)$$

为线性空间 V 上的一个自同态．那么,φ 是 G 等变的,也就是说,对任意 $x \in G$ 都有

$$x\varphi = \varphi x .$$

这个关系式很容易由 $\sum_{g\in G} g = \sum_{g\in G} xgx^{-1}$ 得到. 因为 φ 是G 等变的,所以 φ 的核与像都是 V 的子表示.

我们现在来证明 φ 实际上是从 V 到其G 不变子空间 V^G 上的投影. 设 $V=\varphi(w)$,那么对任意 $h\in G$,

$$hV = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hgw = \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G} g'W = \varphi(W) = V .$$

以上等式的得出是因为当 g 遍历 G 中所有元素时,$g'=hg$ 也遍历 G 中所有元素.如果 $v\in V^G$,那么 $\varphi(V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gv = V$.

由此得出 V^G 包含在 φ 的像中,而且 $\varphi\circ\varphi=\varphi$. 这就证明了 φ 是 V 到 V^G 的投影映射. 因此,

$$\dim V^G = \mathrm{trace}\varphi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{trace} g = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) . \tag{2.3a}$$

设 V,W 为G 的二个表示. 我们注意到 $\mathrm{Hom}(V,W)$中 G 不变元素为:

$$\mathrm{Hom}(V,W)^G = \{G \text{ 等变的由 } V \text{ 到 } W \text{ 的线性变换}\}.$$

这个空间通常记作 $\mathrm{Hom}G(V_1,W)$. 如果 V 与 W 同为G 的不可约表示,那么利用 Schar 引理,我们得出

$$\dim\mathrm{Hom}_G(V,W) = \begin{cases} 1, \text{如果 } V\cong W, \\ 0, \text{如果 } V\ncong W. \end{cases}$$

作为 G 的表示空间,$\mathrm{Hom}(V,W)\cong V^*\otimes W$. 利用§2.2 中命题中性质(iii)和(v)我们得到

$$\chi_{\mathrm{Hom}}(V,W) = \overline{\chi_V(g)}\cdot\chi_W(g).$$

我们再利用上面所得到的公式(2.3a),得出

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) = \begin{cases} 1, \text{如果 } W\cong V, \\ 0, \text{如果 } W\ncong V. \end{cases}$$

这就证明了不可约表示特征的正交关系.

在我们给出定理的性质(ii)与(iii)的证明之前,我们先引进 G 的正则表示的概念. 设 V 为由一组基$\{\eta x \mid x\in G\}$生成的线性空间. 定义 G 在 V 上的作用为

$$g\sum_{x\in G}a_x\eta_x = \sum_{x\in G}a_x\eta_{gx}.$$

也就是说 G 在 V 上的作用是对基向量作置换. 这是 G 的一个表示,称为正则表示. 我们也可以用另外一种方式定义正则表示,也就是 G 在所有定义在 G 的复数值函数上的作用. 设 α 为 G 上的一个复数值函数,那么 G 的作用为

$$(g\alpha)(x)=\alpha(g^{-1}x).$$

请留意 g 在变量 x 的左乘要用其逆元素,只有这样才能得到 G 的一个表示.

定理中性质(ii)的证明　由于不同的不可约表示的特征是互相正交的,所以它们是线性无关的. 若要证明它们组成类函数空间的一组基, 我们还需证明他们生成整个空间. 假设有某一类函数 α 满足对任意一个不可约表示 V 的特征 χ 都有$\langle\alpha,\chi\rangle=0$,我们必须证明 α 恒为 0 .

我们考虑 V 的自同态

$$\varphi_\alpha = \sum_{g\in G}\alpha(g)g: V\to V.$$

这一映射 φ_α 是 G 等变的. 用 Schar 引理,我们得到 φ_α 必为数乘映射 λI . 进一步我们得到

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{\dim V}\operatorname{trace}(\varphi_\alpha)\\ &= \frac{1}{\dim V}\sum_{g\in G}\alpha(g)\chi_V(g)\\ &= \frac{|G|}{\dim V}\overline{\langle\alpha,\chi_{V^*}(g)\rangle}\end{aligned}$$

$$=0.$$

因此,φ_α 是零映射. 也就是 $\sum_{g\in G}\alpha(g)g$ 在任何一个表示空间的作用为零,因为所有表示都是不可约表示的直和. 特别地,φ_α 在正则表示为零. 因此 $\varphi_\alpha(\eta_e)=0$,也就是

$$\sum_{g\in G}\alpha(g)g\eta_e = \sum_{g\in G}\alpha(g)\eta_g = 0.$$

因为$\{\eta_g\}$是一组基,它是一个由线性无关的向量组成的集合,所以 $\alpha(g)=0$ 对任意的 g 都成立. 这就证明了 α 为零函数,同时完成了性质(ii)的证明.

定理中性质(iii)的证明　设 G 的正则表示 R 分解为以下不可约表示的直和

$$n_1V_1\oplus n_2V_2\oplus\cdots\oplus n_rV_r.$$

注意到我们有

$$\chi_R(g)=\begin{cases}0,\text{如果 } g\neq e,\\ 1,\text{如果 } g=e.\end{cases}$$

因此,

$$n_i=\langle\chi_i,\chi_R\rangle=\frac{1}{|G|}\chi_i(e),|G|=\dim V_i.$$

所以正则表示 R 的维数可以写作:

$$\sum_{i=1}^{r}n_i\dim V_i = \sum_{i=1}^{r}(\dim V_i)^2 = |G|.$$

第三章　对称群

§3.1　对称群 S_n

设 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$为含有 n 个元素的集合．我们将 X 的所有置换组成的变换群称为 n 个元素对称群，记为 S_n．对称群 S_n 中每个元素都称为置换．

为了简化记号，我们把 X 写成 $X=\{1,2,\cdots,n\}$．若 σ 是 S_n 中的一个置换，而且 $\sigma(1)=i_1,\sigma(2)=i_2,\cdots,\sigma(n)=i_n$，那么我们用$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$来表示$\sigma$，记为 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$．

例　设 $\sigma\in S_3$ 为下列置换

$$x_1\to x_2,x_2\to x_3,x_3\to x_1.$$

那么我们就记为 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$．

群 S_n 的阶为 n 的阶乘 $n!=n(n-1)\cdots2\cdot1$．这可以由以下推论得出．设 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$为 S_n 中任意一个置换．我们可以让 i_1 从$\{1,2,\cdots,n\}$中取任何一个元素．一旦 i_1 确定，为避免重复，我们必须让i_2在剩下的 $n-1$个元素中

取值．以此类推，我们得到用以代表置换的这种符号 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 共有 $n!$ 个．也就是说 $|S_n| = n!$ ．

设 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 为 X 中 k 个不同正整数．我们用下列符号 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 来代表这样一个置换 σ，

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \cdots, \sigma(i_k) = i_1,$$

并且 σ 保持其他元素不变．这样的置换称为 k－循环．如果 σ 是只涉及二个元素的 2－循环，我们称之为对换．

定理 S_n 中任意一个置换都可分解为不相交的循环的乘积．

证明 设 σ 为 S_n 中一个置换．我们令 H 为由 σ 生成的循环子群，也就是

$$H = \{\sigma^i \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

我们考虑 H 在集合 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上的作用．这个作用所得到任何一个含有 k 个元素的轨道形成一个 k－循环

$$(i, \sigma(i), \sigma^2(i), \cdots, \sigma^{k-1}(i)).$$

因为 X 可以分解为不相交轨道的并集，所以 σ 是不相交循环的乘积．

我们把正整数 n 写作一组正整数的和 $n = n_1 + \cdots + n_r$ 的分解定义为 n 的划分．

推论 S_n 中共轭类的个数等于 n 的不同划分的个数．

证明 设 $\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 为 S_n 中的一个 k－循环，设 τ 为 S_n 中任何一个置换．那么 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 也是一个 k－循环，

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1), \tau(i_2), \cdots, \tau(i_k)).$$

所以，S_n 的一个共轭类是由它的元素如何分解为不相交的循环的长度所确定，也就是由 n 的划分确定．

注 S_n 中任何一个置换都可以写成一些对换的乘积．这

是因为每个置换都是一些循环的乘积，而每一循环

$$(i_1, i_2, \cdots, i_k) = (i_1, i_k) \cdots (i_1, i_3)(i_1, i_2)$$

都是一些对换的乘积.

我们可以证明任何置换 σ 或者可以写成偶数个对换的乘积，或者可以写成奇数个对换的乘积，二者必居其一. 这一点可以从 σ 在下列多项式的作用得出. 设 Δ 为多项式

$$\Delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

定义 σ 在 Δ 上的作用为

$$\sigma\Delta = \prod_{i<j} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}).$$

显然有 σ 或者保持 Δ 不变或者改变其符号由 Δ 变为 $-\Delta$. 当 σ 是偶数个对换之积时，$\sigma\Delta = \Delta$，我们称 σ 为偶置换. 当 σ 是奇数个对换之积时，$\sigma\Delta = -\Delta$，我们称 σ 为奇置换. 所有的偶置换生成 S_n 的一个子群 A_n，我们称之为交错群.

命题 当 $n \geqslant 5$ 时，交错群 A_n 是单群.

证明 我们只列出证明的步骤. 证明可以分为三步. 第一步先证明任何一个偶置换都是一些3－循环的乘积. 第二步再证明在 $n \geqslant 5$ 时，任何二个 3－循环都在 A_n 中共轭. 最后证明若 N 是 A_n 的一个不是 $\{e\}$ 的正规子群，那么 N 一定含有一个 3－循环. 由此得到 N 必为 A_n. 每一步的具体证明可以参阅[La].

§3.2 导出表示

设 H 为 G 的一个子群. G 的任何一个表示 V 限制在 H 上

就给出了H的一个表示，我们记之为$\mathrm{Res}_H^G V$．我们现在来描述一种由H的表示构造G的表示的方法．设V为G的表示$W \subset V$是一个H不变子空间，那么对任意的$g \in G$，以下V的子空间$g \cdot w = \{g \cdot w | w \in W\}$完全由$g$所属的左陪集$gH$确定，这是因为$gh \cdot w = g \cdot (h \cdot w) = g \cdot w$．因此，我们可以对任意一个$H$的左陪集$\sigma \in G/H$，定义$\sigma \cdot w$为一个确定的$V$的子空间．我们称$V$为由$W$导出的表示，如果它满足

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W .$$

我们记导出表示为$V = \mathrm{Ind}_H^G W$．

命题 给定一个H的表示W，那么导出表示V一定存在而且在等价的意义下是惟一的．

证明 我们选定左陪集$\sigma \in G/H$中的一个元素g_σ为代表元，单位元素e是左陪集H的代表元．我们先来证明导出表示的惟一性．对于V中任意一个向量v都有以下分解

$$v = \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma w_\sigma ，其中\ w_\sigma \in W .$$

给定一个元素$g \in G$，和一个左陪集$\sigma \in G/H$，存在一个元素$h \in H$和一个左陪集$\tau \in G/H$，使得$g \cdot g_\sigma = g_\tau \cdot h$．这样就有，

$$g \cdot (g_\sigma w_\sigma) = (g \cdot g_\sigma) w_\sigma = (g_\tau \cdot h) w_\sigma = g_\tau \cdot (h w_\sigma).$$

所以g在V上的作用完全确定．由此而知导出表示是惟一的．而且以上计算揭示出我们应该如何从w出发构造导出表示．

我们对每一个左陪集$\sigma \in G/H$，都指定一个线性空间W^σ．这个线性空间W^σ与W是同构的线性空间．如果$w \in W$为一向量，我们用$g_\sigma w$表示在其同构下对应的w^σ中的向量．我们定义V为线性空间的直和：

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W^\sigma .$$

亦即V中任意一个向量v都可表示为$v = \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma W_\sigma$，这里的

w_σ 是 W 中的向量.给定 $g\in G$,我们定义 g 对 v 的作用为:

$$g\cdot(g_\sigma w)=g_\tau(hw_\sigma),\text{如果 } g\cdot g_\sigma=g_\tau\cdot h\ .$$

我们需要证明以上定义给出了 G 在线性空间 V 上的表示,也就是说我们必须验证以下等式:对任意的 $g'\in G$,都有

$$g'\cdot(g\cdot(g_\sigma w))=(g'\cdot g)\cdot(g_\sigma w_\sigma).$$

假定存在一个左陪集 $\rho\in G/H$ 和 $h'\in H$,使得 $g'\cdot g_\tau=g_\rho\cdot h'$,根据定义我们有

$$\begin{aligned}g'\cdot(g\cdot(g_\sigma w))&=g'\cdot(g_\tau(hw_\sigma))\\&=g_\rho(h'(hw_\sigma))\\&=g_\rho(h'hw_\sigma).\end{aligned}$$

因为 $(g'\cdot g)\cdot g_\sigma=g'\cdot(g\cdot g_\sigma)=g'(g_\tau\cdot h)=(g'\cdot g_\tau)h=g_\rho(h'h)$,所以根据定义,我们得出

$$(g'\cdot g)\cdot(g_\sigma w_\sigma)=g_\rho(h'hw_\sigma).$$

因此上述等式是正确的,也就是在这种定义的 G 的作用下,我们得到一个表示.这就完成了导出表示存在性的证明.

例 1) 我们定义群 G 在其左陪集空间 V 上的表示如下: V 是由一组基$\{\eta_\sigma\mid\sigma\in G/H\}$生成.$G$ 在 V 上的作用定义为

$$g\sum c_\sigma\eta_\sigma=\sum c_\sigma\eta_{g\sigma}\ .$$

这个表示是由子群 H 的平凡表示诱导得到,亦即

$$V=\mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{I}).$$

2) G 的正则表示是其子群 H 的正则表示的导出表示.

我们从上面命题的证明中可以看到,若 V 是 W 的导出表示,那么 W^σ 在 g 的作用下映射到 $W^{g\sigma}$.所以我们为了计算 g 的作用对应的迹,应该找出这样的左陪集 σ,使得 $g\sigma=\sigma$,也就是 σ 中的元素 s 满足 $s^{-1}gs\in H$.因此导出表示的特征为

$$\chi_{\mathrm{Ind}(W)}(g)=\sum_{\substack{\sigma\in G/H\\ g\sigma=\sigma}}\chi_W(s^{-1}gs)\quad(s\in\sigma)\ .$$

定理 设 W 为 H 的表示，U 为 G 的表示．这里 H 是 G 的子群．那么任何一个 H 模同态（也就 H 等交的同态）

$\varphi: W \to \mathrm{Res}U$ 都可以扩张为一个 G 模同态 $\tilde{\varphi}: \mathrm{Ind}W \to U$．也就是说，

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}U) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}W, U).$$

证明 设 $V = \mathrm{Ind}W = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W^\sigma$ 为导出表示．我们定义 $\tilde{\varphi}$ 在每一个子空间 W^σ 为下面映射的复合：

$$W^\sigma \xrightarrow{g_\sigma^{-1}} W \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{g_\sigma} U.$$

这与左陪集 σ 的代表元 g_σ 的选取无关，因为 φ 是 H 模同态．

作为上述定理的推论，我们得到 Frobenius 互反性定理．

推论 我们有以下公式

$$\langle \chi_W, \chi_{\mathrm{Res}U} \rangle_H = \langle \chi_{\mathrm{Ind}W}, \chi_U \rangle_G.$$

这个等式左边为 H 模的特征内积，右边为 G 模的特征内积．

证明 因为内积的线性关系，我们只需证明上述公式对不可约表示成立．现在设 W 为 H 的不可约表示，U 为 G 的不可约表示．等式左边是不可约表示 W 在表示 $\mathrm{Res}U$ 中出现的次数，它等于 $\dim \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}U)$．等式右边是不可约表示 U 在表示 $\mathrm{Ind}W$ 中出现的次数，它等于 $\dim \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}W, U)$．上面的定理保证两者是相等的．

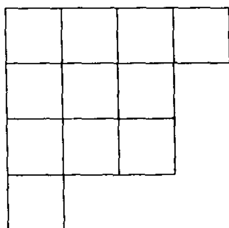
§3.3 S_n 的不可约表示

对称群 S_n 的互不等价的不可约表示的个数等于 S_n 的共轭

类的个数,也就是 n 的不同划分的个数.

对于 n 的每一个划分 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$,使得 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k$ 而且 $\lambda_1+\cdots+\lambda_k=n$,我们都使之对应一个图形.这个图形从上至下共有 k 行,第 i 行有 λ_i 个方格,每一行最左边的方格排为一列.这样的图形称为 Young 图.所以 n 的划分与有 n 个方格的 Young 图一一对应.

例 (4,3,3,1)是一个 11 的划分.它所对应的 Young 图为



给定 n 的一个划分 λ,我们定义其共轭划分 μ 如下:μ 所对应的 Young 图是由互换 λ 所对应的 Young 图的行与列而成,也就是关于 45°对角线作镜面反射而成.

例 设 $\lambda=(3,3,2,1)$,那么 λ 的共轭 $\mu=(4,3,2)$.

Young 图可以用来定义 S_n 正则表示上的投影算子.利用这些投影算子,我们得出 S_n 的所有不可约表示.给定一个对应于一个 n 的划分为 Young 图,我们在每个方格中填入从 1 至 n 中的一个整数,由此得到一个图表.如果这样一个图表中的数字满足从上到下和从左到右都是递减的,那么我们称之为 Young 表.

例 对应于划分(4,3,3,1),一个 Young 表的例子是

11	9	8	6
10	5	4	
7	3	2	
1			

对于给定的一个定义在 Young 图 λ 上的 Young 表,我们定义以下两个 S_n 的子群:

$P_\lambda=\{\sigma\in S_n\mid\sigma$ 保持这个 Young 表的每一行$\}$;

$Q_\lambda=\{\sigma\in S_n\mid\sigma$ 保持这个 Young 表的每一列$\}$.

然后,在 S_n 的群代数 $\mathbb{C}S_n$ 中我们选择两个元素:

$$a_\lambda=\sum_{\sigma\in P_\lambda}\eta_\sigma,\quad b_\lambda=\sum_{\sigma\in Q_\lambda}\mathrm{Sgn}(\sigma)\eta_\sigma .$$

这里用到的群代数 $\mathbb{C}S_n$ 是指利用线性关系将群 S_n 的乘法扩展到 S_n 正则表示所作用的线性空间所得到的代数,也就是定义 $\eta_\sigma\eta_\tau=\eta_{\sigma\tau}$. 设 V 是 S_n 的一个表示,我们可以得到 a_λ 和 b_λ 在 V 的 n 次张量积 $V^{\otimes n}=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{n次}$ 上的作用,这个作用定义为 S_n 中的置换对 $V^{\otimes n}$ 中的向量作相对应的置换,也就是说 a_λ 和 b_λ 对应于 $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ 的一个映射. 我们可以得出

$$\mathrm{Im}(a_\lambda)=S^{\lambda_1}V\otimes S^{\lambda_2}V\otimes\cdots\otimes S^{\lambda_k}V\subseteq S^{\otimes n}.$$

这里的 S^{λ_i} 是指度数为 λ_i 的对称张量积,上面包含关系是由把 $V^{\otimes n}$ 的元素的因子按 Young 表的行分组而得到. 我们同样也可以得到

$$\mathrm{Im}(b_\lambda)=\wedge^{\mu_1}V\otimes\cdots\otimes\wedge^{\mu_e}V\subseteq V^{\otimes n}.$$

这里的 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_e)$ 是 λ 的共轭划分. $\wedge^{\mu_i}$ 是指度数为 μ_i 的交错张量积.

最后我们定义 $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{C}S_n$.这个 c_λ 称为对应于 λ 的 Young 对称算子.c_λ 乘以某个常数是$\mathbb{C}S_n$ 中的幂等元素.c_λ 在$\mathbb{C}S_n$ 上右乘所得到的像是 S_n 的一个不可约表示 V_λ .S_n 的所有不可约表示都可以由这种方式得到(读者若对这些结论的证明有兴趣,可以参阅[FH]中定理 4.3 的证明).这样我们就得到了一个 S_n 的共轭类到S_n 的不可约表示的一一对应.虽然我们证明了有限群 G 的共轭类个数等于其不等价的不可约表示的个数,但是我们尚且无法对一般群 G 建立从 G 的共轭类到 G 的不可约表示的一一对应.

注 我们把 Young 对称算子 c_λ 作用在 $V^{\otimes n}$ 的像记作 $\mathbb{S}_\lambda(V)$:

$$\mathbb{S}_\lambda(V) = \mathrm{Im}(c_\lambda : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}).$$

我们把映射 $V \longrightarrow \mathbb{S}_\lambda(V)$称为 Schur 函子.可以证明对于任何一个线性空间,$\mathbb{S}_\lambda(V)$都是 $GL(V)$的一个不可约表示,而且 $GL(V)$的任意一个不可约表示都等价于某个$\mathbb{S}_\lambda(V)$.

对于 n 的一个划分$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$,我们考虑 S_n 的一个子群 $S_\lambda = S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_k}$.这个子群一般称为 Young 子群.设 Ψ_λ 为导出表示 $\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_n}(\mathbb{1})$的特征.

注 对应于划分 λ 的 S_n 的不可约表示 V_λ,其特征 x_λ 可以由下列公式算出:

$$x_\lambda = \sum_{\tau \in S_K} \mathrm{Sgn}(\tau) \Psi(\lambda_1 + \tau(1) - 1, \lambda_2 + \tau(2) - 2, \cdots, \lambda_k + \tau(k) - k).$$

以上公式并没有在本书其他地方用到.给出这个公式的目的是想指出一个不可约表示的特征往往可以由一些导出表示的整系数线性组合表出.

§ 3.4 Frobenius 公式

S_n 中的共轭类可以用以下序列表出：

$$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\text{满足}\sum_{k=1}^{n}k\mu_k = n .$$

也就是说这个共轭类中的元素是不相交的 μ_1 个 1 - 循环，μ_2 个 2 - 循环直至 μ_n 个 n - 循环的乘积．当然这里的 μ_k 可以为 0．这个共轭类我们记之为 c_μ．

对于 n 的一个划分 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$ 满足关系 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k$，我们定义

$$l_1=\lambda_1+k-1,l_2=\lambda_2+k-2,\cdots,l_k=\lambda_k,$$

这样就得到了一个严格单调递减序列．我们以 $x_1,\cdots,x_k$ 作为变量，定义以下多元多项式

$$P_j(x)=x_1^j+x_2^j+\cdots+x_k^j,j=1,\cdots,n .$$

$$\Delta(x)=\prod_{i<j}(x_i-x_j).$$

如果 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_k)$ 为一个多元多项式，我们记

$$[f(x)]_{(l_1,\cdots,l_k)}\text{为 } f(x)\text{ 中 } x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k}\text{这一项的系数}.$$

定理 （Frobenius） S_n 的不可约表示 V_λ 的特征 χ_λ 在共轭类 c_μ 上的值可以由下列公式算出：

$$\chi_\lambda(c_\mu) = \left[\Delta(x)\prod_{j=1}^{n}P_j(x)^{\mu_j}\right]_{(l_1,\cdots,l_k)} .$$

推论 不可约表示 V_λ 的维数

$$\dim V_\lambda = \frac{n!}{l_1!\cdots l_k!}\prod_{i<j}(l_i-l_j) .$$

关于 Frobenius 公式的证明,读者可以参阅[FH].

§3.5 特征公式表

我们现在描述计算 S_n 不可约表示特征表的一种算法.这个算法是由 G. James [Ja]得到的.

我们先以词典编译的方式定义在所有 n 的划分上的一个序:我们称 $\lambda > \mu$,如果第一个不为零的 $\lambda_i - \mu_i$ 为正.

设矩阵 $A = (a_{\lambda\mu})$,其中 $a_{\lambda\mu}$ 等于 S_n 的子群 $S_\lambda \cap S_\mu$ 中所有元素的个数.这个矩阵可以通过计算得出.设 χ_λ 为不可约表示 V_λ 的特征,Ψ_λ 为导出表示 $\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_n}(\mathbb{1})$的特征.我们定义矩阵 $B = (b_{\lambda\mu})$,其中 $b_{\lambda\mu} = \langle \chi_\lambda, \Psi_\mu \rangle \cdot |S_\mu|$.可以证明 B 是一上三角矩阵,其对角线元素$|S_\mu|$.假定矩阵 $C = (c_{\lambda\mu})$为 S_n 不可约表示的特征表,也就是 $c_{\lambda\mu}$是χ_λ 在 μ 所对应的共轭类上的取值.那么根据 Frobenius 互反定理和在特征上的内积的定义,我们得出:

$$\sum_\nu c_{\lambda\nu} a_{\mu\nu} = |S_\mu| (\chi_{\mathrm{Res} V_\lambda}, \chi_{\mathbb{1}})_{S_\lambda} = b_{\lambda\mu}.$$

因此,我们得出 $B = CA^T$.这里 A^T 表示矩阵 A 的转置.这样矩阵 C 的计算转化为矩阵 B 的计算,因为 $C = B(A^T)^{-1}$.进一步我们有

$$\begin{aligned}\sum_\nu b_{\nu\lambda} b_{\nu\mu} &= |S_\lambda| \cdot |S_\mu| \cdot \langle \chi_{\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_n}\mathbb{1}}, \chi_{\mathrm{Ind}_{S_\mu}^{S_n}\mathbb{1}} \rangle \\ &= |S_\lambda| \cdot |S_\mu| \cdot \langle \chi_{\mathrm{Res}_{S_\mu}^{S_n}(\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_n})\mathbb{1}}, \mathbb{1} \rangle \\ &= |S_\lambda| \sum_\nu \chi_{\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_n}\mathbb{1}}(c_\nu) \cdot |S_\mu \cap S_\nu|\end{aligned}$$

$$= \sum_{\nu} (n!/|S_\nu|) \cdot |S_\lambda \cap S_\mu| \cdot |S_\mu \cap S_\nu|$$

$$= \sum_{\nu} (n!/|S_\nu|) a_{\lambda\nu} a_{\mu\nu} .$$

由于对称矩阵 A 可以通过计算得出，而且 B 为上三角矩阵，我们可以从 B 的左上角开始将 B 的表值逐一解出. 由于 B 的上三角性质，每一步计算只涉及 B 的一个表值，而且 B 的表值都为非负数，这样我们就可以逐步得到整个矩阵 B .

定理 如果矩阵 $A=(a_{\lambda\mu})$，其中 $a_{\lambda\mu}=|S_\lambda \cap S_\mu|$ 已知，那么我们可以找到一个惟一的上三角形矩阵 $B=(b_{\lambda\mu})$，使得 $b_{\lambda\mu} \geqslant 0$ 而且满足

$$\sum_{\nu} b_{\nu\lambda} b_{\nu\mu} = \sum_{\nu} (n!/|S_\nu|) a_{\lambda\nu} a_{\mu\nu} .$$

进而 S_n 不可约表示的特征表 $C=B(A^T)^{-1}$ 可以由此算出.

例 1) 设 $n=4$. S_4 的特征表为

	[4]	[3,1]	[2²]	[2,1²]	[1⁴]
$\chi[4]$	1	1	1	1	1
$\chi[3,1]$	−1	0	−1	1	3
$\chi[2^2]$	0	−1	2	0	2
$\chi[2,1^2]$	1	0	−1	−1	3
$\chi[1^4]$	−1	1	1	−1	1

2) 设 $n=5$. 对称矩阵 A 为(我们只列出上三角部分)

	[5]	[4,1]	[3,2]	[3.1²]	[2²,1]	[2,1³]	[1⁵]
[5]	24	30	20	20	15	10	1
[4,1]		6	0	8	3	6	1
[3,2]			2	2	3	4	1
[3,1²]				2	0	3	1
[2²,1]					1	2	1
[2,1³]						1	1
[1⁵]							1

上三角矩阵 B 为

	[5]	[4,1]	[3,2]	[3.1²]	[2²,1]	[2,1³]	[1⁵]
[5]	120	24	12	6	4	2	1
[4,1]		24	12	12	8	6	4
[3,2]			12	6	8	6	5
[3,1²]				6	4	6	6
[2²,1]					4	4	5
[2,1³]						2	4
[1⁵]							1

对称群 S_5 的不可约表示的特征表为

	[5]	[4,1]	[3,2]	[3,1²]	[2²,1]	[2,1³]	[1⁵]
$\chi[5]$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi[4,1]$	−1	0	−1	1	0	2	4
$\chi[3,2]$	0	−1	1	−1	1	1	5
$\chi[3,1^2]$	1	0	0	0	−2	0	6
$\chi[2^2,1]$	0	1	−1	−1	1	−1	5
$\chi[2,1^3]$	−1	0	1	1	0	−2	4
$\chi[1^5]$	1	−1	−1	1	1	−1	1

3)设 $n=6$ .S_6 的不可约表示的特征表为

	[6]	[5,1]	[4,2]	[4,1²]	[3²]	[3,2,1]	[3,1³]	[2³]	[2²,1²]	[2,1⁴]	[1⁶]
$\chi[6]$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi[5,1]$	−1	0	−1	1	−1	0	2	−1	1	3	5
$\chi[4,2]$	0	−1	1	−1	0	0	0	3	1	3	9
$\chi[4,1^2]$	1	0	0	0	1	−1	1	−2	−2	2	10
$\chi[3^2]$	0	0	−1	−1	2	1	−1	−3	1	1	5
$\chi[3,2,1]$	0	1	0	0	−2	0	−2	0	0	0	16
$\chi[3,1^3]$	−1	0	0	0	1	1	1	2	−2	−2	10
$\chi[2^3]$	0	0	−1	1	2	−1	−1	3	1	−1	5
$\chi[2^2,1^2]$	0	−1	1	1	0	0	0	−3	1	−3	9
$\chi[2,1^4]$	1	0	−1	−1	−1	0	2	1	1	−3	5
$\chi[1^6]$	−1	1	1	−1	1	1	1	−1	1	−1	1

第四章　单李代数的结构

§4.1　李代数的基本概念

一个定义在域$\mathbb{F}$上的李代数$\mathfrak{g}$是一个$\mathbb{F}$上的线性空间,再加上乘法运算

$$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g},\quad (X,Y)\longmapsto[X,Y].$$

这种运算要满足以下三个条件:

(i) $[X,Y]$对变量X和Y都是线性的;

(ii) $[X,X]=0,\ \forall X\in\mathfrak{g}$;

(iii) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0,\ \forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}$.

注　条件(iii)中的等式常常被称为Jacobi恒等式.如果域$\mathbb{F}$的特征不为2,那么条件(ii)与下面的条件(ii)′等价:

(ii)′$[X,Y]=-[Y,X],\quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}$.

我们可以在条件(ii)的等式中用$X+Y$取代X而得到(ii)′中的等式.如果要从(ii)′中的等式推出(ii)中的等式,那么我们只需要令$X=Y$.

李代数中的乘法常常被称为李括号.请注意这种乘法不满足结合律.如果A是一个结合代数,也就是在线性空间A上定义了

满足结合律的乘法,那么我们可以定义 A 上的另一种乘法而得到一个李代数 $L(A)$.这种乘法定义为$[X,Y]=XY-YX$.显然$[X,Y]$为 X 与 Y 都是线性的,而且$[X,X]=0$.我们并且有

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z] &= (XY-YX)Z-Z(XY-YX)\\ &= XYZ-YXZ-ZXY+ZYX.\end{aligned}$$

由此得出,

$$\begin{aligned}&[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]\\ =&\ XYZ-YXZ-ZXY+ZYX\\ &+YZX-ZYX-XYZ+XZY\\ &+ZXY-XZY-YZX+YXZ\\ =&\ 0.\end{aligned}$$

所以,Jacobi 恒等式在这种乘法的定义下也成立.

设 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 为定义在域 $\mathbb{F}$ 上的李代数.一个李代数的同态 $\varphi:\mathfrak{g}_1\longrightarrow\mathfrak{g}_2$ 是一个线性空间的线性变换,而且满足 $\varphi([X,Y])=[\varphi(X),\varphi(Y)]$对任意的 $\mathfrak{g}$ 中元素 X,Y 都成立.

一个从 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的李代数同构 φ,是一个既单又满的李代数同态.

李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个线性子空间 $\mathfrak{y}$ 被称为是李子代数,如果 $\mathfrak{y}$ 中任意二个元素 X,Y 都满足$[X,Y]\in\mathfrak{y}$.

李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个线性子空间 $\mathfrak{y}$ 被称为是理想,如果对任意的 $X\in\mathfrak{y}$ 和任意的 $Y\in\mathfrak{g}$,都满足$[X,Y]\in\mathfrak{y}$.因为李代数的乘法满足$[X,Y]=-[Y,X]$,所以在李代数中没有左理想与右理想之分,所有理想都是双边理想.

正像正规子群在群中所起的作用一样,一个李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{y}$ 可以用来定义商李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{y}$.作为线性空间的商空间,$\mathfrak{g}/\mathfrak{y}$ 中每一个元素都是一个陪集 $X+\mathfrak{y}=\{X+Y\mid Y\in\mathfrak{y}\}$.我们在$\mathfrak{g}/\mathfrak{y}$ 上定义一个乘法运算:

$$[X+\mathfrak{y},y+\mathfrak{y}]=[X,Y]+\mathfrak{y}.$$

我们首先要说明这个定义是良定的,也就是说如果有 $X+\mathfrak{y}=X'+\mathfrak{y}$和 $Y+\mathfrak{y}=Y'+\mathfrak{y}$,那么一定就有$[X,Y]+\mathfrak{y}=[X',Y']+\mathfrak{y}$.现在我们设 $X'=X+a$, $Y'=Y+b$,其中 $a,b\in\mathfrak{y}$,所以有

$$[X',Y']=[X,Y]+[X,b]+[a,Y]+[a,b]\in[X,Y]+\mathfrak{y},$$

这是因为$[X,b]$,$[a,Y]$与$[a,b]$都包含在理想 $\mathfrak{y}$ 之中.这就证明了$[X,Y]+\mathfrak{y}=[X',Y']+\mathfrak{y}$.不难验证,$\mathfrak{g}/\mathfrak{y}$ 在上述乘法定义下成为一个李代数.

我们称把 $X\in\mathfrak{g}$ 映为 $X+\mathfrak{y}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{y}$ 的从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{y}$ 的李代数同态为自然同态.给定一个李代数同态 $\varphi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}_1$,那么 φ 的核 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想,φ 的像 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的子代数.而且我们有以下李代数同构:$\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\varphi\longrightarrow\mathrm{Im}\varphi$.

§4.2 李代数的实例

如果一个李代数 $\mathfrak{g}$ 满足$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$,那么我们称 $\mathfrak{g}$ 为交换李代数.换言之,交换李代数的李括号是平凡的.

我们归纳定义 $\mathfrak{g}$ 的一系列子空间 $\mathfrak{g}^1,\mathfrak{g}^2,\cdots$如下:

$\mathfrak{g}^1=\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{n+1}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^n]$.

这样定义的一系列子空间 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots$都是 $\mathfrak{g}$ 的理想.这是因为如果 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{y}$ 同为 $\mathfrak{g}$ 的理想,那么$[\mathfrak{k},\mathfrak{y}]$也是 $\mathfrak{g}$ 的理想.这一点可以从以下公式得到,设 $X\in\mathfrak{k}$, $Y\in\mathfrak{y}$, $Z\in\mathfrak{g}$,那么可以由 Jacobi 恒等式推出

$$[[X,Y],Z]=[X,[Y,Z]]+[[X,Z],Y]\in[\mathfrak{k},\mathfrak{y}].$$

显然我们有 $\mathfrak{g}^{n+1}=[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}^n]\subseteq\mathfrak{g}^n$,所以上述序列是递减的

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^1\supseteq\mathfrak{g}^2\supseteq\cdots$$

我们称李代数 $\mathfrak{g}$ 为幂零的，如果存在一个正整数 n 使得 $\mathfrak{g}^n=0$.

例 设 $\mathfrak{n}=\{(a_{ij})\}$是所有 $n\times n$ 的严格上三角矩阵组成的线性空间，$a_{ij}\in\mathbb{F}$.那么在$[A,B]=AB-BA$ 为李括号的定义之下，$\mathfrak{n}$ 是一个幂零李代数.

我们还可以归纳地定义 $\mathfrak{g}$ 中另一系列子空间 $\mathfrak{g}^{(0)},\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(2)}$ …如下：

$$\mathfrak{g}^{(0)}=\mathfrak{g},\quad \mathfrak{g}^{(n+1)}=[\mathfrak{g}^{(n)},\mathfrak{g}^{(n)}].$$

所有的 $\mathfrak{g}^{(i)}$也都是 $\mathfrak{g}$ 的理想，而且有 $\mathfrak{g}^{(n+1)}=[\mathfrak{g}^{(n)},\mathfrak{g}^{(n)}]\subseteq\mathfrak{g}^{(n)}$.由此可知，

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{(0)}\supseteq\mathfrak{g}^{(1)}\supseteq\mathfrak{g}^{(2)}\supseteq\cdots$$

也是一个递减序列.李代数 $\mathfrak{g}$ 被称为是可解的，如果存在某个正整数 n 使得 $\mathfrak{g}^{(n)}=0$.

注 所有的幂零李代数都是可解的.这是因为我们有以下包含关系 $\mathfrak{g}^{(n+1)}\subset\mathfrak{g}^{(n)}$.

例 设 $\mathfrak{s}$ 为所有 $n\times n$ 的上三角矩阵组成的线性空间，我们定义 $\mathfrak{s}$ 上的李括号为$[A,B]=AB-BA$.这样得到的李代数 $\mathfrak{s}$ 为可解.请注意 $\mathfrak{s}$ 并非幂零的.然而$[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]=\mathfrak{n}$ 是幂零的.

我们称李代数 $\mathfrak{g}$ 为单李代数，如果 $\mathfrak{g}$ 只有 0 和 $\mathfrak{g}$ 二个平凡理想.

一个李代数 $\mathfrak{g}$ 的维数是指 $\mathfrak{g}$ 作为线性空间的维数.所有一维的李代数都是单的，因为它们根本就没有非平凡的子空间.所以一维的单李代数被称为平凡单李代数.从现在起，当我们再提及单李代群，一般是指非平凡的单李代数.而且，在这一章中我们将只讨论复单李代数，也就是定义在复数域上的单李代数.

例 1)设 $gl(n,\mathbb{C})$为所有 $n\times n$ 复矩阵组成的复李代数.设 $sl(n,\mathbb{C})$ 为 $gl(n,\mathbb{C})$ 迹为零的元素组成的子集.那么 $sl(n,\mathbb{C})$ 是$gl(n,\mathbb{C})$的一个理想.这是因为，若$A\in sl(n,\mathbb{C})$，

$B\in gl(n,\mathbb{C})$,那么,

$$\operatorname{trace}[A,B]=\operatorname{trace}(AB-BA)=\operatorname{trace}AB-\operatorname{trace}BA=0\ .$$

所以 $gl(n,\mathbb{C})$不是单李代数.

2) 当 $n\geqslant 2$ 时李代数 $sl(n,\mathbb{C})$是单的.为了证明 $sl(n,\mathbb{C})$是单的,我们设 $\mathfrak{k}$ 为 $sl(n,\mathbb{C})$的一个理想,$A=(a_{ij})$是 $\mathfrak{k}$ 中一个非零矩阵,我们必须证明 $\mathfrak{k}=sl(n,\mathbb{C})$.我们用 E_{ij}表示第 i 行第 j 列为 1 其他位置为零的矩阵.因为 A 为非零矩阵,所以存在正整数 i 和 j 使得 $a_{ji}\neq 0$.我们先假设 $i\neq j$,这时有

$$\begin{aligned}[[A,E_{ij}],E_{ij}]&=[AE_{ij}-E_{ij}A,E_{ij}]\\&=(AE_{ij}-E_{ij}A)E_{ij}-E_{ij}(AE_{ij}-E_{ij}A)\\&=AE_{ij}E_{ij}+E_{ij}E_{ij}-2E_{ij}AE_{ij}\\&=-2E_{ij}AE_{ij}\\&=-2a_{ji}E_{ij}.\end{aligned}$$

因为等式 $E_{ij}E_{ij}=0$ 对所有的 $i\neq j$ 都成立.如果对所有的 $i\neq j$ 都有 $a_{ij}=0$,那么 A 是一个对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

而且 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$,这时有某一对 $\lambda_i\neq\lambda_j$,

$$[A,E_{ij}]=(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij}.$$

由此推出理想 $\mathfrak{k}$ 中含有某个矩阵 E_{ij},由此矩阵可以生成 $sl(n,\mathbb{C})$.这就证明了 $sl(n,\mathbb{C})$为单李代数.

§4.3 根子空间分解

设 $\mathfrak{g}$ 为有限维的复单李代数.对于 $\mathfrak{g}$ 的任意一个子代数 $\mathfrak{h}$,

我们可以定义

$$I(\mathfrak{h})=\{x\in\mathfrak{g}\mid[x,y]\in\mathfrak{h},\forall y\in\mathfrak{h}\}.$$

不难验证 $I(\mathfrak{h})$是 $\mathfrak{g}$ 中包含 $\mathfrak{h}$ 的子代数,而且 $\mathfrak{h}$ 是 $I(\mathfrak{h})$的理想.设 $\mathfrak{k}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数,而且 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{k}$ 中的理想,那么我们推出 $\mathfrak{k}\subseteq I(\mathfrak{h})$.换言之,$I(\mathfrak{h})$是 $\mathfrak{g}$ 中包含 $\mathfrak{h}$ 为其理想的极大子代数.我们称 $I(\mathfrak{h})$为 $\mathfrak{h}$ 的理想化子.

如果 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h}$ 满足关系 $I(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$,而且 $\mathfrak{h}$ 是幂零的,那么我们称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.下面定理的证明可以在[Hu]中找到.

定理 任何一个复的有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 都有 Cartan 子代数.如果 $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 同为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数,那么一定存在一个 $\mathfrak{g}$ 的自同构 φ 使得 $\varphi(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$.

例 设 $\mathfrak{g}=sl(n,\mathbb{C})$.取 $\mathfrak{h}$ 为所有 $\mathfrak{g}$ 中对角矩阵组成的子代数.那么,$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

显然 $\mathfrak{h}$ 是交换李代数.为了验证 $I(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$,我们设 $\sum\limits_{i,j}a_{ij}E_{ij}$ 为 $I(\mathfrak{h})$中任意一个元素.选取从1到 n 之间的不同的两个整数 p 与 q,因为 $E_{pp}-E_{qq}\in\mathfrak{h}$,所以

$$\left[\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij},E_{pp}-E_{qq}\right]\in\mathfrak{h}.$$

由此得出,

$$\sum_i a_{ip}E_{ip}-\sum a_{iq}E_{iq}-\sum_j a_{pj}E_{pj}-\sum_j a_{qj}E_{qj}\in\mathfrak{h}.$$

进一步我们得出 $a_{pq}=0$,因为上面给出一个对角矩阵.由于这个结论对任意选取的 $p\neq q$ 都对,所以 $\sum\limits_{i,j}a_{ij}E_{ij}$ 是一个对角矩阵,也就是 $\sum\limits_{i,j}a_{ij}E_{ij}\in\mathfrak{h}$.

我们现在来考虑以下映射 $ad:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.这个映射的

定义如下:对任意的 $x\in\mathfrak{y}$,定义

$$ad(X): Y\longmapsto[X,Y], \forall Y\in\mathfrak{g}.$$

这样我们可以把 $\mathfrak{y}$ 当作一族两两交换的 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换.这些线性变换可以同时对角化,由此得到

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{y}\oplus\sum_{\alpha}\mathbb{C}X_\alpha,$$

其中$\mathbb{C}x_\alpha$ 是一些 1 维的特征子空间,也就是对任意 $x\in\mathfrak{y}$ 都有

$$[X,X_\alpha]=\alpha(X)X_\alpha, \alpha(X)\in\mathbb{C}.$$

这里的 α 是 $\mathfrak{y}$ 的对偶空间 $\mathfrak{y}^*=\mathrm{Hom}(\mathfrak{y},\mathbb{C})$中的元素.我们可以肯定 α 不为零,因为若 $\alpha=0$,则有$[X,X_\alpha]=0$,那么 $X_\alpha\in I(\mathfrak{y})=\mathfrak{y}$,也就是 X_α 属于特征值恒为 0 的子空间 $\mathfrak{y}$.我们将这些非零的 $\alpha\in\mathfrak{y}^*$ 称为 $\mathfrak{g}$ 相对 $\mathfrak{y}$ 的根.将所有根组成的集合记为 Φ,称为根集.所以,我们有

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{y}\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}\mathbb{C}X_\alpha,$$

而且 $\dim\mathfrak{g}=\dim\mathfrak{y}+|\Phi|$.

例 设 $\mathfrak{g}=sl(n,\mathbb{C})$,并设 $\mathfrak{y}$ 为 $\mathfrak{g}$ 中所有对角矩阵组成的 Cartan 子代数.那么

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{y}\oplus\sum_{i\neq j}\mathbb{C}E_{ij}.$$

$\mathfrak{y}$ 中任意一个元素 A 都可写作

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

满足 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$.那么

$$[A,E_{ij}]=(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij}.$$

如果我们定义 $e_i\in\mathfrak{y}^*$ 使得

$$e_i:\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\longmapsto\lambda_i,$$

那么根集 $\Phi=\{e_i-e_j\}_{i\neq j}$.

根集 Φ 具有以下性质.如果 $\alpha\in\Phi$,那么 $-\alpha\in\Phi$.而且 Φ 中元素的线性组合生成整个空间 $\mathfrak{h}^*$.但是 Φ 中的元素并不是线性无关的,所以我们自然地会想到选取 Φ 中一个子集作为 $\mathfrak{h}^*$ 的一组基.事实上我们用如下方法选取一组基 Π,这组基中的每个元素 $\alpha\in\Pi$ 称为单根,而且每个根或者为 Σ 中元素的正整系数线性组合或者为 Π 中元素的负整系数线性组合,二者必居其一.这样的基的选取并不是惟一的.一旦选定一个单根集 Σ,根集 Φ 可以分解为正根集 Φ^+ 与负根集 Φ^- 的无交并集.也就是说,

$$\Phi=\Phi^+\cup\Phi^-,\quad \Phi^+=-\Phi^-.$$

我们用 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 来表示由 Σ 中元素作实系数线性组合生成的空间.这个空间与单根集 Σ 的选取无关,因为它同时可以看作是由所有根作实系数线性组合生成的空间.这样就有

$$\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}^*=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}=l.$$

这个正整数 l 被称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的秩.

例 设 $\mathfrak{g}=sl(n,\mathbb{C})$.我们可以选取下面单根集

$$\Pi=\{e_1-e_2,e_2-e_3,\cdots,e_{n-1}-e_n\}.$$

这样任何一个根 e_i-e_j 可以有以下形式表出:

若 $i<j$,则有 $e_i-e_j=(e_i-e_{i+1})+(e_{i+1}-e_{i+2})+\cdots+(e_{j-1}-e_j)$,

若 $i>j$,则有 $e_j-e_i=(e_j-e_{j+1})-(e_{j+1}-e_{j+2})-\cdots-(e_{i-1}-e_i)$.

所以正根集 $\Phi^+=\{e_i-e_j\mid i<j\}$,负根集 $\Phi^-=\{e_j-e_i\mid i>j\}$.李代数 $sl(n,\mathbb{C})$的秩为 $n-1$.

§4.4 Killing 型

在上一节中我们曾经考虑过以下的映射 $ad:\mathfrak{g}\longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})$.这个映射的定义是对于任意 $X\in\mathfrak{g}$,

$$ad(X):\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g},\ Y\longmapsto[X,Y],\ \forall\, Y\in\mathfrak{g}.$$

顺便提一下这个映射 ad 称为 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示,我们将在下一章中详细讨论.对于 $X\in\mathfrak{g}$,我们将 $ad(X)$ 看作是 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换.固定 $\mathfrak{g}$ 的一组基,则有一个矩阵对应于线性变换 $ad(X)$.我们定义 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型为以下的双线性映射 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathbb{C}$,

$$(X,Y)=\mathrm{trace}\ ad(X)ad(Y).$$

这个定义与 $\mathfrak{g}$ 的基的选取无关.因为 $\mathrm{trace}AB=\mathrm{trace}BA$,所以 $(X,Y)=(Y,X)$.也就是说 Killing 型是一个对称二次型.

例 设 $\mathfrak{g}=sl(2,\mathbb{C})$.选定以下 $\mathfrak{g}$ 的元素作为标准基:

$$X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

在这组基下 ad 映射对应的矩阵为

$$ad(X)=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},ad(H)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$ad(Y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}.$$

因此,Killing 型所对应的对称矩阵为

$$ad(X)=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&8&0\\4&0&0\end{pmatrix}.$$

现在设 $\mathfrak{g}$ 为非平凡的复半李代数，那么 $\mathfrak{g}$ 的 Killing$\langle,\rangle$型是非退化的，也就是说，

若$\langle X,Y\rangle=0$ 对所有的 $Y\in\mathfrak{g}$ 成立，那么一定有 $X=0$.

为了说明 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是非退化的，我们定义它的核

$$\mathrm{Ker}\langle,\rangle=\{X\in\mathfrak{g}\mid\langle X,Y\rangle=0,\forall\, Y\in\mathfrak{g}\}.$$

不难看出，Ker$\langle,\rangle$是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想．因为 $\mathfrak{g}$ 是单的，所以 Ker$\langle,\rangle$必为零理想，也就是说 Killing 型是非退化的．

我们可以将 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型限制到 Cartan 子代数 $\mathfrak{y}$ 上，这样就得到了 $\mathfrak{y}$ 上的一个二次型 $\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}\longrightarrow\mathbb{C}$.可以证明这个二次型在 $\mathfrak{y}$ 上也是非退化的．这样我们利用 Killing 就得到了 $\mathfrak{y}$ 上一个非退化的对称二次型．这个二次型又诱导出一个线性映射 $\mathfrak{y}\to\mathfrak{y}^*$，这个映射使任意的 $X\in\mathfrak{y}$ 对应于 $f_X\in\mathfrak{y}^*$，其中 f_X 的定义为

$$f_X(Y)=\langle X,Y\rangle,\forall\, Y\in\mathfrak{y}.$$

因为$\langle,\rangle$在 $\mathfrak{y}$ 上是非退化的，所以上面诱导出的映射为一一对应．也就是说，每一个 $\mathfrak{y}^*$ 中的元素都可表示为 f_X，这里的 X 是惟一确定的．因此，我们也就得到了双线性映射

$$\mathfrak{y}^*\times\mathfrak{y}^*\to\mathbb{C},\langle f_X,f_Y\rangle\mapsto\langle X,Y\rangle,\forall\, X,Y\in\mathfrak{y}.$$

我们可以将这个在 $\mathfrak{y}^*$ 上定义的双线性映射限制在 $\mathfrak{y}_{\mathbb{R}}^*$ 上，而且其取值也为实数，这样就得到了一个 $\mathfrak{y}_{\mathbb{R}}^*$ 上的实对称二次型．这个二次型还是正定的，也就是说

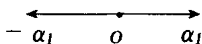
$$\langle\lambda,\lambda\rangle\geqslant0,\forall\,\lambda\in\mathfrak{y}_{\mathbb{R}}^*\text{ 而且}\langle\lambda,\lambda\rangle=0\text{ 当且仅当 }\lambda=0.$$

因此，$\mathfrak{y}_{\mathbb{R}}^*$ 在这个正定的内积之下成为一个欧几里得空间(简称为欧氏空间)．

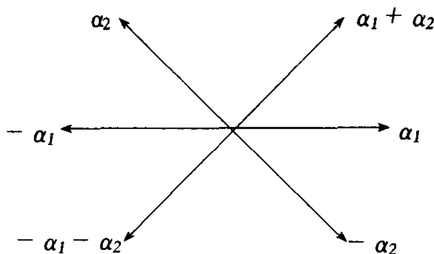
这个欧氏空间 $\mathfrak{y}_{\mathbb{R}}^*$ 包含了所有的根，也就是说 $\mathfrak{y}_{\mathbb{R}}^*\supset\Phi$.

而 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 中所含根集的构形完全确定了李代数 $\mathfrak{g}$.这种根集的构形称为根系.所以我们可以用根系的分类来确定复单李代数的分类.

例 1) $\mathfrak{g}=sl(2,\mathbb{C})$,则有 $\dim\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*=1$.设单根集为 $\Pi=\{\alpha_1\}$,那么 $\Phi=\{\alpha_1,-\alpha_1\}$. 这个根集在1维欧氏空间 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 中的构形为



2) 设 $\mathfrak{g}$ 为 $sl(3,\mathbb{C})$,则有 $\dim\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*=2$.设单根集 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$,则有根集 $\Phi=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_1-\alpha_2\}$.由此根集在2维欧氏空间 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 中生成的构形为



§4.5 Weyl 群

为了更好地分析根系,我们引进 Weyl 群的概念. 这是一个由以下可逆的线性变换生成的群,对任何一个根 $\alpha\in\Phi$,定义 $s_\alpha:\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*\to\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$,使得

$$s_\alpha(\lambda)=\lambda-\frac{2\langle\alpha,\lambda\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha\rangle},\forall\lambda\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*.$$

显然有 $s_\alpha(\alpha)=-\alpha$,而且若 $\langle\lambda,\alpha\rangle=0$ 则有 $s_\alpha(\lambda)=\lambda$. 所以 s_α 是一个关于垂直于 α 的平面的镜面反射. 设 W 为所有 s_α 生成

的群．这个群称为 Weyl 群．

Weyl 群满足以下性质：首先它在根集 Φ 上的作用为置换，也就是说若 $w\in W,\alpha\in\Phi$，则有 $w(\alpha)\in\Phi$．由这一点可以得出 W 一定是有限制，因为它是某一有限对称群的子群．再者，所有的根都可以由单根经过 Weyl 群中元素作用得到，也就是说任给 $\alpha\in\Phi$ 都存在某个 $\alpha_i\in\Pi$ 和 $w\in W$，使得 $w(\alpha_i)=\alpha$．第三，W 是由所有对应于单根的反射 $s_{\alpha_i},\alpha_i\in\Pi$ 生成．

Weyl 群在表示论中起着举足轻重的作用．利用 Weyl 群我们可以从单根集 Π 出发而构造出整个根系．如果单根集 Π 已经给定，那么 Weyl 则随之确定，因为 Weyl 群是由单反射 $s_{\alpha_i}(\alpha_i\in\Pi)$ 所生成．因而根系 $\Phi=w(\Pi)$ 也就确定．也就是说我们可以让一系列单反射作用到单根上，一直到不再能得新的向量为止，这样就可以得到所有的根．

例 设 $\mathfrak{g}=sl(3,\mathbb{C})$，单根集 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$．那么根系 $\Phi=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_1-\alpha_2\}$ 可以由 $s_{\alpha_1},s_{\alpha_2}$ 连续作用在 Π 得到，这正如上节中的构形所表示的那样．

设 $\alpha_i,\alpha_j\in\Pi$ 为单根，那么

$$s_{\alpha_i}(\alpha_j)=\alpha_j-\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\alpha_i$$

也是一个根，而且应该是单根的整系数线性组合．由于这个根的关于 α_j 的系数为 1，所以关于其他单根的系数也应为正整数，因而我们得出

$$\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\in\mathbb{Z},\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\leqslant 0\ .$$

对所有的 i 和 j 我们记 $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$ 为 a_{ij}，这些整数被称为 Cartan 整数，由它们确定的矩阵 $A=(a_{ij})$ 被称为 Cartan 矩阵．这样的

矩阵 $A=(a_{ij})$都满足：

$a_{ij}\in\mathbb{Z}, a_{ii}=2$，而且 $a_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$.

设 θ_{ij}为向量α_i 与α_j 之间的夹角. 这个夹角可以用以下公式确定：

$$\cos\theta_{ij}=\frac{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

由于有对称性，我们同时有

$$\cos\theta_{ij}=\frac{\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

这样就得到，

$$4\cos^2\theta_{ij}=\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\cdot\frac{2\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle},$$

也就是 $4\cos^2\theta_{ij}=a_{ij}\cdot a_{ji}$.

我们记 $a_{ij}a_{ji}$为n_{ij}. 这样就得到 $n_{ij}\in\mathbb{Z}, n_{ij}\geqslant 0$. 而且进一步因为有

$$|\cos\theta_{ij}|<1, \quad 0\leqslant 4\cos^2\theta_{ij}<4,$$

因而得出正整数 n_{ij}只有 4 种取值的可能：

$$n_{ij}=0,1,2,3\ .$$

例 1) 设 $\mathfrak{y}=sl(2,\mathbb{C})$. 单根集 $\Pi=\{\alpha_1\}$. Weyl 群 W 由s_{α_1}生成. 因为 $s_{\alpha_1}{}^2=1$，所以 W 同构于对称群 S_2 . Cartan 矩阵 $A=(2)$.

2) 设 $\mathfrak{y}=sl(3,\mathbb{C})$. 则有单根集 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，Weyl 群 W 由 s_{α_1}和 s_{α_2}生成，且满足

$$s_{\alpha_1}{}^2=s_{\alpha_2}{}^2=1, \quad s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}=s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}.$$

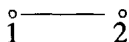
由此得出 W 同构于对称群S_3 . Cartan 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

3）对一般的正整数 n，$\mathfrak{g}=sl(n,\mathbb{C})$的 Weyl 群同构于对称群 S_n．读者可以尝试自己写出其 Cartan 矩阵．

§ 4.6 Dynkin 图

给定一个复单李代数 $\mathfrak{g}$．我们可以得到一个对应的图 Δ．这个图 Δ 的顶点与所有的单根$\{\alpha_i\}$一一对应；而对应于α_i和α_j的两个顶点之间我们用 n_{ij}条边相连；而且若 $n_{ij}>1$，我们还要给定这 n_{ij}条边一个定向．这样得到的图称为 Dynkin 图．

例 设 $\mathfrak{g}=sl(3,\mathbb{C})$．则有 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$S_{\alpha_1}(\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$，$S_{\alpha_2}(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2$．所以 $\alpha_{12}=-1$，$\alpha_{21}=-1$，$n_{12}=1$．所对应的 Dynkin 图为



Dynkin 图 Δ 由 $\mathfrak{g}$ 完全确定，这与 Cartan 子代数的选取无关，因为任意两个 Cartan 子代数都在 $\mathfrak{g}$ 的自同构下共轭．这与单根的选取也无关，因为可以证明若 Π_1 和 Π_2 为两个单根集，那么一定存在一个 Weyl 群中的元素 w 使得 $w(\Pi_1)=\Pi_2$．可以证明，对应于复单李代数的 Dynkin 图具备以下性质：Δ 一定是连通的，而且由于 $n_{ij}\leqslant 3$，所以连接 Δ 中二个顶点之间的边不会超过 3 条．我们还可以定义一个对应于 Dynkin 图 Δ 的二次型：

$$Q(x_1,\cdots x_l)=2\sum_{i=1}^{l}x_i^2-\sum_{i\neq j}\sqrt{n_{ij}}x_ix_j\ .$$

这个二次型由 Dynkin 图 Δ 所确定.

例 设 $\mathfrak{g}=sl(3,\mathbb{C})$. $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图为

$$\underset{1}{\circ}\text{——}\underset{2}{\circ}$$

二次型 $Q(x_1,x_2)=2\,x_1{}^2+x_2{}^2-2x_1x_2$.

上面定义的二次型 $Q(x_1,\cdots,x_l)$是正定的,因为它可以表示为

$$Q(x_1,\cdots,x_l)=2\left\langle\frac{\sum x_i\alpha_i}{\sqrt{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}},\frac{\sum x_i\alpha_i}{\sqrt{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}}\right\rangle .$$

在这一节的剩余部分我们来确定所有具备上面所刻画的性质的图 Δ .

定理 设一个图 Δ 满足下列条件:

(a) Δ 是连通的;

(b) 连接任意两个顶点的边不超过 3 条;

(c) 由 Δ 确定的二次型 Q 是正定的.

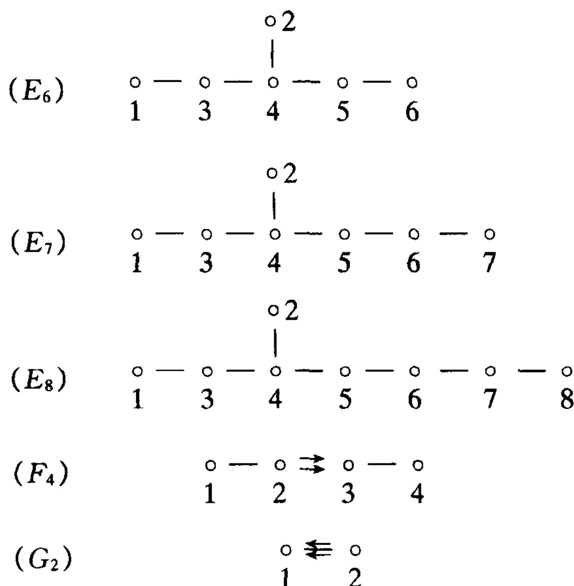
那么图 Δ 一定是下列图之一:

(A_l) $$\underset{1}{\circ}-\underset{2}{\circ}\cdots\underset{l-2}{\circ}-\underset{l-1}{\circ}-\underset{l}{\circ}$$

(B_l) $$\underset{1}{\circ}-\underset{2}{\circ}\cdots\underset{l-2}{\circ}-\underset{l-1}{\circ}\Rightarrow\underset{l}{\circ}$$

(C_l) $$\underset{1}{\circ}-\underset{2}{\circ}\cdots\underset{l-2}{\circ}-\underset{l-1}{\circ}\Leftarrow\underset{l}{\circ}$$

(D_l) $$\underset{1}{\circ}-\underset{2}{\circ}\cdots\underset{l-3}{\circ}-\underset{l-2}{\circ}\begin{matrix}\diagup\circ\, l-1\\ \diagdown\circ\, l\end{matrix}$$



注 以上列出的图称为 Dynkin 图. 我们将会看到,存在着一个 Dynkin 图到单复李群的一一对应. 上面的图中在连接两个顶点为多条边时,会有箭头出现. 这些会在单李代数的分类中用到. 在上面的定理中,箭头并没有什么意义,我们只是为了以后使用方便才在这里加上箭头,在定理的证明之后我们将会马上指出箭头的定义和作用. 现在我们可以暂且不顾及这些箭头,也就是我们暂且不区分图 B_l 和 C_l .

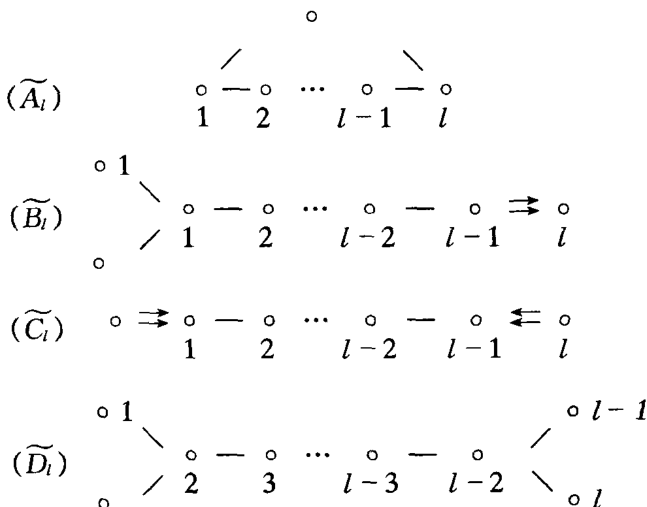
定理的证明 为了方便叙述我们将定理中所列的图称为标准图. 如果我们省去某一标准图的一些顶点或一些边所得到的连通子图仍然是一个标准图,例如 ∘═∘ 是 ∘—∘═∘—∘ 的子图. 由线性代数的定理可知,如果一个图 Δ 对应的二次型为正定的,那么它的子图对应的二次型也是正定的.

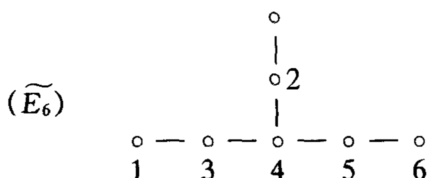
设 M 为一个图 Δ 对应的二次型 Q 所确定的对称矩阵，也就是说，

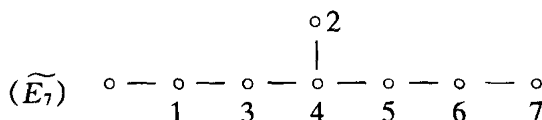
$$M=\begin{pmatrix} 2 & & -\sqrt{n_{ij}} \\ & \ddots & \\ -\sqrt{n_{ij}} & & 2 \end{pmatrix}.$$

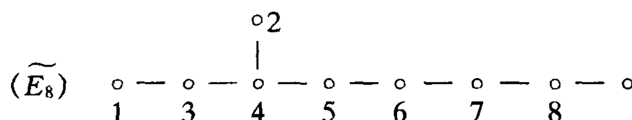
矩阵 M 是正定的充分必要条件是 M 的顺序主子式的行列式为正，这也等价于 M 的所有主子式的行列式为正．而 M 的主子式恰好对应于 Δ 的子图．因此，为了确定每个标准图对应的二次型都是正定的，我们只需要验证每个标准图所对应的矩阵 M 满足 $\det M>0$．这一点我们可以逐一验证．

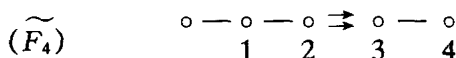
反之我们需要证明只有标准图才满足定理所描述的三个条件．为了证明这一点，我们引入第二列图：













以上所列的图称为扩充的 Dynkin 图. 可以验证由扩充的 Dynkin 图 $\tilde{\Delta}$所确定的二次型所对应的对称矩阵 M 满足 $\det M = 0$. 所以这个矩阵 M 不是正定的. 由此而知任何满足定理所述条件的图 Δ 不可能在此扩充 Dynkin 图列之中.

我们现在设 Δ 为一个满足定理所述条件(a),(b)和(c)的图. 那么图 Δ 一定不含有圈,否则 Δ 将包含某一$\tilde{A}_l$为子图. 图 Δ 至多有二个顶点用多条边相连,否则 Δ 将包含某一$\tilde{C}_l$为子图. 图 Δ 不可能同时有多条边和分叉点,否则 Δ 将包含某一$\tilde{B}_l$

为子图．图 Δ 也不可能有多于一个的分叉点，否则 Δ 将包含某一$\tilde{D}_l$为子图．

如果 Δ 包含一个三条边连接相邻的二顶点，那么 Δ 一定是标准图G_2，否则 Δ 将包含$\tilde{G}_2$为子图．在以下的讨论中我们不妨假定 Δ 不含有三条边相连任意二个顶点．

设 Δ 含有一个双边，那么 Δ 不能再有分叉点．如果这个双边所连的一个顶点为端点，那么 Δ 就是标准图B_l(或 C_l)．如果这个双边所连的两个顶点都不是端点，那么 Δ 一定是 F_4，否则 Δ 将包含$\tilde{F}_4$为子图．

再设 Δ 只含有单边．如果 Δ 没有分叉点，那么 Δ 一定是某个A_l．现在不妨设 Δ 有一个分叉点，因为前面已经提到 Δ 不可能有两个或两个以上的分叉点．这个分叉点最多有三个分支，否则 Δ 将包含$\tilde{D}_4$为子图．设这三个分支的长度分别为 l_1，l_2，l_3 且满足 $l_1 \geqslant l_2 \geqslant l_3$，$l_1+l_2+l_3+1=l$．我们一定有 $l_3=1$，否则 Δ 将包含$\tilde{E}_6$为子图．我们还可得出 $l_2 \leqslant 2$，否则 Δ 将包含$\tilde{E}_7$为子图．若有 $l_2=1$，则有 Δ 为标准图 D_l．我们现在设 $l_2=2$．那么 $l_1 \leqslant 4$，否则 Δ 将包含$\tilde{E}_8$为子图．若有 $l_1=2$，则有 Δ 为E_6；若有 $l_1=3$，则有 Δ 为 E_7；若有 $l_1=4$，则有 Δ 为E_8．

至此，我们证明了满足条件(a)，(b)和(c)的图必为标准图．

我们现在再来看看一个 Dynkin 图在什么范围下确定一个 Cartan 矩阵．我们知道对 $i \neq j$ 都有 $n_{ij}=a_{ij}a_{ji}$，而且 a_{ij}与 a_{ji}都是非正的整数，$a_{ij}=0$ 当且仅当 $a_{ji}=0$．因而我们得出以下结论：如果 $n_{ij}=0$，那么 $a_{ij}=a_{ji}=0$；如果 $n_{ij}=1$，那么 $a_{ij}=a_{ji}=-1$；如果 $n_{ij}=2$，那么将有两种可能的情形出现：

(1) $a_{ij}=-1, a_{ji}=-2$ 或者

(2) $a_{ij}=-2, a_{ji}=-1$.

因为按照定义

$$a_{ji}=\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle},$$

所以我们得出

$$\frac{a_{ij}}{a_{ji}}=\frac{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}.$$

由此可知当$\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle>\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle$时第一种情形出现；当$\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle<\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle$时第二种情形出现．我们用一个箭头指向较长的根来区分这两种情形．

同样地在 $n_{ij}=3$ 时，也有两种可能的情形出现．我们同样用一个箭头指向较长的根．

实际上，在图 Δ 为 B_2, F_4 或 G_2 时，由于图 Δ 有对称性，箭头指向不同的方向并没有得出不同的图．只有在 Δ 为 B_l 或 C_l $(l\geqslant 3)$时，箭头指出不同方向给出不同的图，也就有 B_l 与 C_l 的区别．

§ 4.7　单李代数的分类

我们可以利用 Dynkin 图对复单李代数分类．

定理　设 $\mathfrak{g}$ 为有限维的非平凡复单李代数．那么 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵一定与下列某一个标准图所对应：

$A_l(l\geqslant 1), B_l(l\geqslant 2), C_l(l\geqslant 3), D_l(l\geqslant 4)$,

E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 .

反之,给定任何一个对应于上面所列的标准图,都有一个复单李代数 $\mathfrak{g}$,使得 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵与之对应.

Dynkin 图可以确定一个单根集 Π 的构形,也就是任意两个单根之间的夹角和长度之比. 再用 Weyl 群的作用可以得到整个根系 Φ,因为 $\mathfrak{g}$ 有如下根子空间分解:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C} X_\alpha,$$

所以有

$$\dim\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{h} + |\Phi|.$$

在下面的图表中,我们列出所有复单李代数的维数.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}$
A_l	$l(l+2)$
B_l	$l(2l+1)$
C_l	$l(2l+1)$
D_l	$l(2l-1)$
E_6	78
E_7	133
E_8	248
F_4	52
G_2	14

在所有单李代数中,A_l, B_l, C_l, D_l 四族被称为典型李代数,它们可以用矩阵来刻画. 剩余的5个李代数 E_6, E_7, E_8, F_4 和 G_2 被称为例外李代数. 我们现在来具体地描述这些单李代数.

A_l 型:A_l 型的复单李代数同构于 $sl(l+1,\mathbb{C})$,也就是所有迹为零的 $(l+1)\times(l+1)$ 矩阵所生成的李代数.

B_l 型:B_l 型的复单李代数同构于 $so(2l+1,\mathbb{C})$,也就是所有的 $(2l+1)\times(2l+1)$ 斜对称复矩阵组成的李代数.

这个李代数也同构于所有满足下列等式的复矩阵 T 组成的李代数

$$\mathfrak{g}=\{T\in gl(2l+1,\mathbb{C})\mid TA+AT^t=0\}.$$

这里的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_l\\ 0 & I_l & 0\end{pmatrix}$，其中 I_l 为 $l\times l$ 单位矩阵. 使用第二种描述的好处在于 $\mathfrak{g}$ 中对角矩阵组成一个 Cartan 子代数，这样很容易得出 $\mathfrak{g}$ 的根子空间分解.

C_l 型：C_l 型的复单李代数同构于 $sp(2l,\mathbb{C})$，也就是所有满足下列关系的 $2l\times 2l$ 复矩阵 T 组成的李代数

$$\mathfrak{g}=\{T\in gl(2l,\mathbb{C})\mid TA+AT^t=0\}.$$

这里的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & I_l\\ -I_l & 0\end{pmatrix}$.

D_l 型：D_l 型的复单李代数同构于 $so(2l,\mathbb{C})$，也就是所有 $2l\times 2l$ 斜对称复矩阵组成的李代数. 这个李代数也同构于

$$\mathfrak{g}=\{T\in gl(2l,\mathbb{C})\mid TA+AT^t=0\}.$$

其中矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & I_l\\ I_l & 0\end{pmatrix}$. 正像 B_l 中的李代数一样，第二种形式的优点是 $\mathfrak{g}$ 中的对角矩阵组成 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，这样很容易得出根子空间分解.

我们首先来描述这个代数$\mathbb{O}$，它可以定义在任何一个域$\mathbb{F}$上，我们这里实际只需要$\mathbb{F}=\mathbb{C}$的情况. 设$\mathbb{F}$为一个域，$\mathbb{F}^3$为$\mathbb{F}$上的 3 维线性空间，如果 $v=(v_1,v_1,v_3)$和 $w=(w_1,w_2,w_3)$是$\mathbb{F}^3$中的向量，那么 v 和 w 的内积 $v\cdot w=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3$. 设 e_1,e_2,e_3 为$\mathbb{F}^3$的标准正交基，我们可以定义$\mathbb{F}^3$上的一个叉乘 $v\times w=-w\times v$. 我们只需要定义基向量的叉乘再用线性关系扩充至整个$\mathbb{F}^3$：

$$e_i \times e_i = 0(i=1,2,3), e_1 \times e_2 = e_3, e_2 \times e_3 = e_1, e_3 \times e_1 = e_2 .$$

作为线性空间$\mathbb{O}$是以下线性空间的直和：

$$\mathbb{O} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^3 \oplus \mathbb{F}^3.$$

它的元素可以用矩阵的形式写出，也就是$\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{F}$, v, $w \in \mathbb{F}^3$. $\mathbb{O}$ 中的加法和数乘都与矩阵运算相同，但是乘法定义为

$$\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & v' \\ w' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a a' - v \cdot w' & av' + b'v + w \times w' \\ a'w + bw' + v \times v' & b b' - w \cdot v' \end{pmatrix}.$$

如果我们选定$\mathbb{O}$的一组基

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c_{2+i} = \begin{bmatrix} 0 & e_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, c_{s+i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e_i & 0 \end{bmatrix}.$$

$(i=1,2,3)$

那么不难验证，$\mathbb{O}$ 中的乘法表如下：

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
c_1	c_1	0	c_3	c_4	c_5	0	0	0
c_2	0	c_1	0	0	0	c_6	c_7	c_8
c_3	0	c_3	0	c_8	$-c_7$	$-c_1$	0	0
c_4	0	c_4	$-c_8$	0	c_6	0	$-c_1$	0
c_5	0	c_5	c_7	$-c_6$	0	0	0	$-c_1$
c_6	c_6	0	$-c_2$	0	0	0	c_5	$-c_4$
c_7	c_7	0	0	$-c_2$	0	$-c_5$	0	c_3
c_8	c_8	0	0	0	$-c_2$	c_4	$-c_3$	0

其中 $c_1 + c_2$ 为单位元素.

例外李代数：例外李代数可以借助 Cayley 代数$\mathbb{O}$来刻画.

给定一个代数 A,我们定义 A 的一个导子为一个线性映射 $D: A\to A$,使得

$$D(a\cdot b)=Da\cdot b+a\cdot Db\ .$$

可以验证如果 D_1 和 D_2 都是 A 的导子,那么$[D_1,D_2]=D_1D_2-D_2D_1$ 也是 A 的导子. 代数 A 的所有导子 $\mathrm{Der}A$ 组成一个李代数.

Cayley 代数$\mathbb{O}$ 的导子代数 $\mathrm{Der}\mathbb{O}$ 是一个 G_2 型的李代数,我们记这个李代数为 $\mathfrak{g}_2$.

所有的定义在$\mathbb{O}$ 上的 3×3Hermitian 矩阵在下面乘法下构成一个 Jordan 代数 J

$$A\cdot B=\frac{1}{2}(AB+BA).$$

这个代数 J 的维数是 27 . J 的导子代数是一个 F_4 型的单李代数,我们记之为 f_4 . 另外3个 E_6,E_7,E_8 型的单李代数也都可以借助 Cayley 代数来构造,我们记之为 $\mathfrak{e}_6,\mathfrak{e}_7,\mathfrak{e}_8$.

第五章 单李代数的表示

§5.1 表示与模

设 $\mathfrak{g}$ 为复李代数．$\mathfrak{g}$ 在一个复线性空间 V 上的表示是一个李代数同态

$$\rho:\mathfrak{g}\to gl(V).$$

两个 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ρ, V) 与 (ρ', V') 称为是等价的，如果存在一个可逆的线性变换 $T: V\to V'$ 使得

$$\rho'(X)=T^{-1}\rho(X)T, \forall X\in\mathfrak{g}.$$

一个 $\mathfrak{g}$ 模是一个复线性空间 V 附加 $\mathfrak{g}$ 的作用

$$\mathfrak{g}\times V\to V,$$

$$(X, v)\mapsto Xv,$$

且满足以下条件：

(i) Xv 对 $X\in\mathfrak{g}$ 和 $v\in V$ 都是线性的；

(ii) $[X, Y]v=X(Yv)-Y(Xv), \forall X, Y\in\mathfrak{g}, v\in V$.

如果 $\rho:\mathfrak{g}\to gl(V)$ 是一个 $\mathfrak{g}$ 的表示，那么 V 可以看作是一个 $\mathfrak{g}$ 模，我们只需要定义 $Xv=\rho(X)v$.

反之，任何一个有限维 $\mathfrak{g}$ 模也都给出 $\mathfrak{g}$ 的一个表示．取定 V 的一组基 $v_1, \cdots, v_n$，那么 Xv_i 可以表示为 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性

组合．设

$$Xv_i=\sum_{k=1}^{n}\rho_{ki}(X)v_k\ .$$

由此得到一个 $n\times n$ 矩阵 $\rho(X)=(\rho_{ij}(X))$．可以验证

$$\begin{aligned}\rho([X,Y])&=\rho(X)\rho(Y)-\rho(Y)\rho(X)\\&=[\rho(X),\rho(Y)],\end{aligned}$$

由此映射 $X\mapsto\rho(X)$是一个李代数同态 $\mathfrak{g}\to gl(V)$，也就是一个 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的表示．

所以我们可以交替使用模与表示两种不同但互相等价的语言．

设 W 为 $\mathfrak{g}$ 模 V 的一个线性子空间．如果对任意的 $X\in\mathfrak{g}$ 和 $w\in W$ 都有 $Xw\in W$，那么我们称 W 为 V 的一个子模．如果一个 $\mathfrak{g}$ 模 V 只有 O 和 V 两个子模，那么我们称 V 为不可约 $\mathfrak{g}$ 模．

例 我们可以把李代数 $\mathfrak{g}$ 看作是一个 $\mathfrak{g}$ 模．我们定义 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用如下：$(X,Y)\mapsto[X,Y]$．要证明这个作用是一个 $\mathfrak{g}$ 模，只需要

$$[[X,Y],Z]=[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]],\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}\ .$$

这恰好是 Jacobi 恒等式．这样得到的 $\mathfrak{g}$ 模称为伴随 $\mathfrak{g}$ 模，它所对应的表示称为伴随表示．

正如 §2.1 中有限群的表示一样，对应于 $\mathfrak{g}$ 的表示同样有下面的

Schur 引理 设 $\rho:\mathfrak{g}\to gl(V)$为 $\mathfrak{g}$ 的一个不可约表示．那么 V 的与所有 $\rho(X)$交换的自同态必为数乘变换．

我们称一个复李代数 $\mathfrak{g}$ 为半单的，如果 $\mathfrak{g}$ 是一些复单李代数的直和，也就是

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_n,$$

其中每一个 $\mathfrak{g}_i$ 都是单李代数而且是 $\mathfrak{g}$ 的双边理想．半单李代数的表示理论本质上就是单李代数的表示理论．正如有限群的有限维表示都是完全可约的，半单李代数的有限维表示也都是完全可约的．

定理 设 $\rho:\mathfrak{g}\to gl(V)$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个有限维表示．那么 ρ 是完全可约的，也就是说 V 可以分解为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示的直和．

读者可以参阅[Hu]中第六节的证明．

§5.2 $sl(2,\mathbb{C})$的表示

设 $\mathfrak{g}$ 为 $sl(2,\mathbb{C})$．这是维数最小的复单李代数．我们现在来确定 $\mathfrak{g}$ 的所有有限维不可约表示．首先，我们选取 $sl(2,\mathbb{C})$ 的一组基：

$$X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

不难验证，这组基满足下列关系式：

$$[H,X]=2X,[H,Y]=-2Y,[X,Y]=H.$$

设 V 为 $\mathfrak{g}$ 的任意一个有限维不可约表示．可以证明 h 在 V 上的作用可以对角化，也就是我们有以下分解

$$V=\bigoplus V_\lambda,$$

这个直和遍历所有的复数 λ 使得

$$V_\lambda=\{v\in V\mid Hv=\lambda v\}\neq\{0\}.$$

这种非零的子空间 V_λ 称为权空间，对应的复数 λ 称为权．

设 $v\in V_\lambda$，那么就有

$$H\cdot(X\cdot v)=[H,X]\cdot v+\cdot X\cdot(H\cdot v)=2X\cdot v+\lambda X\cdot v$$
$$=(\lambda+2)X\cdot v\ .$$
也就是说 $X\cdot v\in V_{\lambda+2}$. 同样我们可以得出 $Y\cdot v\in V_{\lambda-2}$.

因为 V 是一个有限维线性空间,我们可以找到一个极大的 λ,也就是说 λ 是一个权,然而 $\lambda+2$ 不是权. 我们称这个 λ 为最高权. 设 v_0 为极大权子空间 V_λ 中一个非零向量,那么由以下集合

$$\{v_0,Y\cdot v_0,Y^2\cdot v_0{}^2,\cdots\}$$

中向量的线性组合生成的子空间是一个 $\mathfrak{g}$ 不变子空间. 因为 V 是一个不可约表示,所以这个 $\mathfrak{g}$ 不变子空间必为整个空间 V . 我们递归地定义

$$v_{-1}=0,v_k=\frac{1}{k!}Y^k\cdot v_0,k\in\mathbb{Z},k\geqslant 0\ .$$

那么对 $k\geqslant 0$,我们有

(i) $H\cdot v_k=(\lambda-2k)v_k$;

(ii) $Y\cdot v_k=(k+1)v_{k+1}$;

(iii) $X\cdot v_k=(\lambda-k+1)v_{k-1}$.

(i)和(ii)都是显然的. 我们现在用数学归纳法来证明(iii). 当 k 为 0 时,我们有 $Xv_0=0$,所以(iii)显然成立. 现在设 $k>0$,用归纳假设我们得出

$$\begin{aligned}X\cdot v_k&=\frac{1}{k}X\cdot Y\cdot v_{k-1}\\&=\frac{1}{k}([X,Y]\cdot v_{k-1}+Y\cdot X\cdot v_{k-1})\\&=\frac{1}{k}(H\cdot v_{k-1}+Y\cdot X\cdot v_{k-1})\\&=\frac{1}{k}((\lambda-2(k-1))v_{k-1}+(\lambda-k+2)Y\cdot v_{k-2})\\&=\frac{1}{k}((\lambda-2k+2)v_{k-1}+(k-1)(\lambda-k+2)v_{k-1})\end{aligned}$$

$$=(\lambda-k+1)v_{k-1}.$$

这就证明了(iii)对所有非负整数都成立.

由(i)可以看出所有 v_k 都是线性无关的. 因为 V 是有限维线性空间,所以只能是有限个 v_k 不为零向量. 设 n 为满足条件 $v_n\neq0$ 而且 $v_{n+1}=0$ 的最小整数. 由定义可以得出 $v_{n+i}=0$ 对所有正整数 i 都成立. 因此,我们得出

$$\{v_0,v_1,\cdots,v_n\}$$

组成 V 的一组基,而且每一个权空间都是一维的.

我们在(iii)中代入 $k=n+1$,这样就得到

$$X\cdot v_{n+1}=(\lambda-n)v_n\ .$$

由于 $v_n\neq0$ 而且 $v_{n+1}=0$,所以必有 $\lambda=n$. 这就得到最高权 λ 必为非负整数. 总结以上多项结论,我们得到

定理 设 V 为 $sl(2,\mathbb{C})$ 的一个不可约有限维表示. 那么 V 的最高权必为非负整数 n,而且 V 是下列权子空间的直和

$$V=V_n\oplus V_{n-2}\oplus\cdots\oplus V_{-n},$$

这里的每一个权子空间都是一维的.

例 1) 若最高权 $\lambda=0$,则有 V 同构平凡的 1 维表示.

2) 若最高权 $\lambda=1$,则有 V 同构于在 $\mathbb{C}^2$ 上的自然表示.

3) 若最高权 $\lambda=2$,则有 V 同构于伴随表示.

§5.3 通用包络代数

设 $\mathfrak{g}$ 为有限维复李代数. 设 $T(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的张量代数. 如果我们定义

$$T^0(\mathfrak{g})=\mathbb{C}\ ,T^1(\mathfrak{g})=\mathfrak{g},T^2(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g},\cdots,T^n(\mathfrak{g})=$$

$$\underbrace{\mathfrak{g}\otimes\cdots\otimes\mathfrak{g}}_{n},$$

那么就有

$$T(\mathfrak{g})=\prod_{i=0}^{\infty}T^{i}(\mathfrak{g}).$$

设 I 为 $T(\mathfrak{g})$中由以下元素生成的双边理想

$$X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y],\forall X,Y\in\mathfrak{g}.$$

定义 $U(\mathfrak{g})=T(\mathfrak{g})/I$ 为商代数,这是一个结合代数,称为 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数.

下面的定理描述了 $U(\mathfrak{g})$ 的一组基,这个定理称为 Poincare-Birkhoff-Witt 定理或者 PBW 定理.

定理 我们可以用以下方法确定 $U(\mathfrak{g})$的一组基. 设 $\mathfrak{g}$ 的一组基是$\{X_1,\cdots,X_n\}$,那么

$$X_1^{i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n},i_r\geqslant 0,i_r\in\mathbb{Z}$$

组成 $U(\mathfrak{g})$的一组基.

读者可以在[Hu]找到这个定理的证明. 如果 $\mathfrak{g}$ 为交换的李代数,那么 $X_iX_j=X_jX_i$,因此 $U(\mathfrak{g})$与由 n 个变量生成的多项式代数同构. 对一般的李代数 $\mathfrak{g}$,我们在 $U(\mathfrak{g})$中总有以下关系式

$$X_iX_j-X_jX_i=[X_i,X_j].$$

因此,我们可以把 $U(\mathfrak{g})$看成是某种非交换的多项式代数.

通用包络代数在表示论中十分重要. 如果 V 是一个 $\mathfrak{g}$ 模,那么它也可看作是一个 $U(\mathfrak{g})$模. 首先我们可以将 V 看作是一个张量代数 $T(\mathfrak{g})$的模. 因为

$$[X,Y]v=X(Yv)-Y(Xv)$$

对任意的 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 和 $v\in V$ 都成立,所以我们得出

$$(X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y])v=0.$$

由此而知 $X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y]$这样的元素在 V 上的作用

为 0,也就是包含在 $T(\mathfrak{g})$模 V 的核之中．这个核是 $T(\mathfrak{g})$的双边理想,所以也就包含了由 $X\otimes Y - Y\otimes X - [X, Y]$这类元素生成的理想 I．因此,V 可以看作是一个 $T(\mathfrak{g})/I = U(\mathfrak{g})$的模．

反之,如果 V 是一个 $U(\mathfrak{g})$模,那么它也是一个 $\mathfrak{g}$ 模．这只要用到下列映射

$$\mathfrak{g}\rightarrow T^1(\mathfrak{g})\rightarrow T(\mathfrak{g})\rightarrow U(\mathfrak{g}).$$

由 PBW 定理可知上面的映射是单一映射,所以 $\mathfrak{g}$ 是 $U(\mathfrak{g})$中的子空间,这也给出了 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的作用.

§5.4 Verma 模

设 $\mathfrak{g}$ 为非平凡复单李代数,设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数．我们以前曾提到 $\mathfrak{g}$ 有以下根子空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}\mathbb{C}X_\alpha .$$

Killing 型诱导出 $\mathfrak{h}\leftrightarrow\mathfrak{h}^*$ 的一一对应．设 h_i 为 $\mathfrak{h}$ 中元素对应于 $\mathfrak{h}^*$ 中的元素$\dfrac{2\alpha_i}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$,那么

$$\alpha_j(H_i) = \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = a_{ij}\in\mathbb{Z} . \tag{5.4a}$$

由此可知所有单根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 在 h_i 上的取值都是整数．显然有 $H_1,\cdots,H_l$ 组成 $\mathfrak{h}^*$ 的一组基,我们称每个 h_i 为余根.

设 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$,我们记 $J(\lambda)$为以下元素生成的 $U(\mathfrak{g})$的左理想：$X_\alpha,\alpha\in\Phi^+$和 $H_i-\lambda(H_i)(i=1,\cdots,l)$．也就是说,

$$J(\lambda) = \sum_{\alpha\in\Phi^+}U(\mathfrak{g})X_\alpha + \sum_{i=1}^{l}U(\mathfrak{g})(H_i-\lambda(H_i)1).$$

定义 $M(\lambda)=U(\mathfrak{g})/J(\lambda)$,那么 $M(\lambda)$是一个 $U(\mathfrak{g})$模,我们称之为由 λ 确定的 Verma 模．现在考虑 $U(\mathfrak{g})$模的自然同态：

$$\varphi: U(\mathfrak{g})\rightarrow M(\lambda).$$

设 $v_\lambda=\varphi(1)$．那么我们有下列等式：

$$X_\alpha v_\lambda=0, \forall \alpha\in\Phi^+;$$

$$H_i v_\lambda=\lambda(H_i)v_\lambda, i=1,\cdots,l.$$

因为 $U(\mathfrak{g})$任意一个元素 u 都满足 $u=u\cdot 1$,所以 $M(\lambda)$每个元素都可以写成 $u\cdot v_\lambda$．因此,$M(\lambda)=U(\mathfrak{g})v_\lambda$ 是由 v_λ 生成的循环模.

如果把 $\mathfrak{g}$ 的作用限制在 $\mathfrak{h}$ 上,那么我们也可以把 $M(\lambda)$看作是一个 $\mathfrak{h}$ 模．这样 $M(\lambda)$可以分解为许多 1 维的 $\mathfrak{h}$ 模的直积.而 $\mathfrak{h}$ 在每一个 1 维的 $\mathfrak{h}$ 模上都是数乘变换,也就是说存在一个 $\mu\in\mathfrak{h}^*$,使得 h 作用为 $\mu(H)$．我们称这样的 μ 是 $M(\lambda)$的一个权,显然 λ 就是 $M(\lambda)$的一个权,因为

$$H_i v_\lambda=\lambda(H_i)v_\lambda.$$

$M(\lambda)$所有的权都可以表示为

$$\lambda-m_1\alpha_1-m_2\alpha_2-\cdots-m_l\alpha_l,$$

这里的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 为单根,$m_1,\cdots,m_l$ 为非负整数．所以,我们定义 λ 为 $M(\lambda)$的最高权．$M(\lambda)$称为是最高权为 λ 的 Verma 模.$M(\lambda)$中的向量 V_λ 称为是一个最高权向量.

可以证明 $M(\lambda)$含有一个极大子模 $L(\lambda)$．定义 $V(\lambda)=M(\lambda)/L(\lambda)$为商模,那么 $V(\lambda)$是一个不可约 $U(\mathfrak{g})$模,我们称之为最高权为 λ 的不可约模．在下一节中我们将要确定对哪些 λ 这个不可约模 $V(\lambda)$是有限维的.

§5.5 有限维不可约 $\mathfrak{g}$ 模

在上一节中我们构造了最高权为 λ 的不可约模 $V(\lambda)$. 它是 Verma 模的商模. 对大多数最高权 λ, $V(\lambda)$都是无限维的 $\mathfrak{g}$ 模,只有在 λ 满足下列条件时,也就是在

$$\lambda(H_i)\in\mathbb{Z}, \lambda(H_i)\geqslant 0(i=1,\cdots,l) \qquad (5.5a)$$

这时才有 $V(\lambda)$为有限维 $\mathfrak{g}$ 模. 这里 h_i 是(5.4a)中定义的余根.满足上面条件(5.5a)的 λ 被称为是支配的和整的. 我们简称为整支配的.

定理 不可约 $\mathfrak{g}$ 模 $V(\lambda)$是有限维的充分必要条件是 λ 是整支配的. 任何有限维的不可约 $\mathfrak{g}$ 模都同构于某个整支配权 λ 所确定的模 $V(\lambda)$.

这个定理的前一半可以在[Hu]中找到它的证明. 而定理的后一半是明显的,因为有限维的模至多只有有限个权;而且一个最高权向量 U_λ 生成整个模,这是因为这个模同时又是不可约的.

上面的定理给出了不可约有限维 $\mathfrak{g}$ 模与整支配权之间的一一对应.

整支配权可以用下面的方式表示出. 对 $i=1,\cdots,l$,我们定义一个 $\lambda_i\in\mathfrak{h}^*$,满足下列条件

$$\lambda_i(H_j)=\begin{cases}1, 若\ i=j;\\ 0, 若\ i\neq j.\end{cases}$$

显然这样定义的 λ_i 是一个整支配权,我们称之为基本权. 这些支配权 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 组成了 $\mathfrak{h}^*$ 的一组基. 如果 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 而且满足

$$\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l, m_1, \cdots, m_l \in \mathbb{Z},$$

那么 λ 是一个整支配权．反之，任何一个 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 都可写作

$$\lambda = \lambda(H_1)\lambda_1 + \cdots + \lambda(H_l)\lambda_l .$$

所以 λ 是整支配权的充分必要条件是 λ 是基本权的非负整系数线性组合．

我们现在再来看看基本权 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 与单根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 之间的关系．设

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{l} m_{ji}\lambda_j,$$

那么就有 $\alpha_i(H_j) = m_{ji}\lambda_j(H_j) = m_{ij}$．这就得出

$$m_{ji} = \alpha_i(H_j) = \left\langle \alpha_i, \frac{2\alpha_j}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \right\rangle = \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = a_{ji},$$

所以有

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ji}\lambda_j,$$

也就是说 Cartan 矩阵恰好是从基本权组成的一组基到单根组成的一组基的变换矩阵．

例　1) 设 $g = sl(2,\mathbb{C})$．那么 $\mathfrak{g}$ 的单根集 $\Pi = \{\alpha_1\}$，Cartan 矩阵 $A = (2)$．所以，

$$\alpha_1 = 2\lambda_1, \text{或者 } \lambda_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 .$$

2) 设 $g = sl(3,\mathbb{C})$．那么 $\mathfrak{g}$ 的单根集 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，Cartan 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$．所以

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2, \\ \alpha_2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2. \end{cases}$$

反解这个线性方程组就得到

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2), \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2). \end{cases}$$

设 Λ 为由基本权 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 的整系数线性组合生成的集合，我们称 Λ 为权格．我们把在 Λ 中由单根的整系数线性组合生成的子集合 Λ_r 称为根格．

因为我们在上面已经得出从基本权到单根的变换矩阵为 Cartan 矩阵，所以 Λ_r 在 Λ 中的指标等于 Cartan 矩阵行列式的绝对值，也就是，$[\Lambda : \Lambda_r] = |\det A|$．我们在下面的表格中列出这个指标值：

A_l	$l+1$
B_l	2
C_l	2
D_l	4
E_6	3
E_7	2
E_8	1
F_4	1
G_2	1

§5.6 Weyl 特征与维数公式

设 λ 为一个整支配权，$V(\lambda)$ 是最高权为 λ 的有限维不可约 $\mathfrak{g}$ 模．对于任意一个 $\mu \in \mathfrak{h}^*$，我们定义

$$V(\lambda)_\mu = \{v \in V(\lambda) \mid xv = \mu(x)v, \forall x \in \mathfrak{h}\}.$$

如果 $V(\lambda)_\mu \neq 0$,那么 μ 称为是 $V(\lambda)$ 的权,子空间 $V(\lambda)_\mu$ 称为是 $V(\lambda)$ 的权子空间. 权子空间 $V(\lambda)_\mu$ 的维数称为是权 μ 在 $V(\lambda)$ 中的重数. 我们希望算出所有的权 μ 在 $V(\lambda)$ 中的重数 $\dim V(\lambda)_\mu$.

我们把权格 Λ 视为一个交换群,记 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 为由 Λ 生成的群环. 我们定义 $V(\lambda)$ 的形式特征为

$$ch_{V(\lambda)} = \sum_{\mu \in \Lambda} \dim V(\lambda)_\mu e(\mu).$$

这里的 $e(\mu)(\mu \in \Lambda)$ 组成 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 的一组基,而且满足

$$e(\mu_1)e(\mu_2) = e(\mu_1 + \mu_2).$$

因为 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 是一个整环,我们无妨假定 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 已经嵌入在它的分式域之中. 下面的公式就是定义在 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 的分式域上,这个公式是由 H.Weyl 发现的.

定理 (Weyl 特征公式)最高权为 λ 的有限维不可约表示 $V(\lambda)$ 的形式特征为

$$\mathrm{ch}_{V(\lambda)} = \frac{\sum_{w \in W} \mathrm{Sgn}(w) e(w(\lambda + \delta))}{\sum_{w \in W} \mathrm{Sgn}(w) e(w\delta)},$$

这里的 $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ 是所有正根之和的一半.

Weyl 特征公式以及后面的 Weyl 维数公式的证明可以在 [Hu] 中找到.

例 设 $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$. 所有的整支配权都可以表示为 $m\lambda_1$,这里的 m 为非负整数. 因为 $\delta = \frac{1}{2}\alpha_1 = \lambda_1$,所以 Weyl 特征公式给出

$$\mathrm{ch}_{V(m\lambda_1)} = \frac{\sum\limits_{w \in W} \mathrm{Sgn}(w) e(w(m+1)\lambda_1)}{\sum\limits_{w \in W} \mathrm{Sgn}(w) e(w\lambda_1)}.$$

因为 Weyl 群 $W = \{1, s_{\alpha_1}\}$ 是由二个元素组成的群,而且有 $\mathrm{Sgn}(1)=1, \mathrm{Sgn}(s_{\alpha_1}) = -1$,所以,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}_{V(m\lambda_1)} &= \frac{e((m+1)\lambda_1) - e(-(m+1)\lambda_1)}{e(\lambda_1) - e(-\lambda_1)} \\
&= \frac{e(\lambda_1)^{m+1} - e(\lambda_1)^{-(m+1)}}{e(\lambda_1) - e(\lambda_1)^{-1}} \\
&= e(\lambda_1)^m + e(\lambda_1)^{m-2} + \cdots + e(\lambda_1)^{-m} \\
&= e(m\lambda_1) + e((m-2)\lambda_1) + \cdots + e(-m\lambda_1).
\end{aligned}$$

这就得出 $m\lambda_1, (m-2)\lambda_1, \cdots, -m\lambda_1$ 是 $V(m_1\lambda_1)$ 中所有的权,而且每一权出现的重数是 1 .

我们可以从 Weyl 特征公式推出下面的 Weyl 维数公式.

定理 (Weyl 维数公式)设 $V(\lambda)$ 为最高权为 λ 的有限维不可约 $\mathfrak{g}$ 模,那么 $V(\lambda)$ 的维数是

$$\dim V(\lambda) = \frac{\prod\limits_{\alpha \in \Phi^+} \langle \lambda + \delta, \alpha \rangle}{\prod\limits_{\alpha \in \Phi^+} \langle \delta, \alpha \rangle}.$$

Weyl 维数公式还有一个稍微不同的形式. 我们知道每一个正根都是单根的非负整系数的线性组合,也就是说对任意一个 $\alpha \in \Phi^+$,都有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i, k_i \in \mathbb{Z}, k_i \geqslant 0 .$$

同样任何一个整支配权也是基本权 λ 的非负整系数线性组合,也就是说我们有

$$\lambda = \sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i, m_i \in \mathbb{Z}, m_i \geqslant 0 .$$

设 α 为一个长度较短的单根，记

$$l_i=\frac{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}.$$

如果 α_i 也是短根，那么 $l_i=1$；如果 α_i 为长根，那么除非 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}_2$，$l_i=2$；在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_2$，$\alpha_i$ 又是长根时，$l_i=3$．在以上这些定义下，我们得出，

$$\dim V(\lambda)=\prod_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\sum_{i=1}^{l}k_il_i(m_i+1)}{\sum_{i=1}^{l}k_il_i}$$

例 1)设 $\mathfrak{g}=sl(3,\mathbb{C})$．则有单根集 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，正根集 $\Phi=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2\}$．这时有 $e_1=e_2=1$．设整支配权 $\lambda=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$．那么

$$\dim V(\lambda)=\frac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+1).$$

2) 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_2$ 为例外李代数．则有单根集 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$．设 α_1 为短根．正根集 Φ^+ 有 6 个正根，

$$\Phi^+=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1+2\alpha_2\}.$$

这时有 $l_1=1,l_2=3$．设整支配权 $\lambda=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$，那么

$$\dim V(\lambda)=\frac{1}{5!}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)(2m_1+m_2+3)(3m_1+m_2+4)(3m_1+2m_2+5).$$

第六章　基本表示

§6.1　基本表示

设 $\mathfrak{g}$ 为复单李代数，$\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 为 $\mathfrak{g}$ 的基本权．对于 $i=1,\cdots,l$，最高权为 λ_i 的有限维不可约表示 $V(\lambda_i)$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的基本表示．如果这些基本表示已知，那么 $\mathfrak{g}$ 的任意一个有限维不可约表示都可以在基本表示的张量积中得到．设 $\lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_l\lambda_l$ 为任意一个整支配权，那么最高权为 λ 的不可约表示 $V(\lambda)$ 是下面基本表示张量积的一个子模：

$$\underbrace{V(\lambda_1)\otimes\cdots\otimes V(\lambda_1)}_{m_1}\otimes\cdots\otimes\underbrace{V(\lambda_l)\otimes\cdots\otimes V(\lambda_l)}_{m_l}.$$

我们先来描述典型复单李代数的基本表示．设 $\mathfrak{g}$ 为典型单李代数，$\mathfrak{g}$ 可以是 A_l,B_l,C_l,D_l 型中的任意一个．我们从§4.7 中知道，$\mathfrak{g}$ 同构于某些 $n\times n$ 矩阵组成的李代数，这个 n 可以由下列图表确定：

	n	$\mathfrak{g}$
A_l	$l+1$	$sl(l+1,\mathbb{C})$
B_l	$2l+1$	$so(2l+1,\mathbb{C})$
C_l	$2l$	$sp(2l,\mathbb{C})$
D_l	$2l$	$so(2l,\mathbb{C})$

因此,$\mathfrak{g}$ 在$\mathbb{C}^n$上有一个自然表示,$\mathfrak{g}$ 中元素在$\mathbb{C}^n$上的作用就是矩阵在线性空间$\mathbb{C}^n$上的变换,这个表示的最高权为 λ_1 . 也就是说 $V(\lambda_1)$为维数是 n 的自然表示. $\mathfrak{g}$ 的其他基本表示都可以在 $V(\lambda_1)$的张量幂中得到,只有 $so(n)$的半旋表示除外. 半旋表示要用到 Clifford 代数来构造,我们将在本章后三节中详细讨论.

为简明起见,我们用 V 来代表 $\mathfrak{g}$ 的自然表示.设 $T(V)$为 V 的张量代数,也就是

$$T(V)=\mathbb{C}\oplus V\oplus(V\otimes V)\oplus(V\otimes V\otimes V)\oplus\cdots$$

设 I 为 $T(V)$中由所有 $v\otimes v(v\in V)$生成的双边理想,定义 $\wedge(V)=T(V)/I$ 为商代数. 我们称 $\wedge(V)$为 V 的外代数. 我们有以下分解:

$$\wedge(V)=\wedge^0(V)\oplus\wedge^1(V)\oplus\wedge^2(V)\oplus\cdots\oplus\wedge^n(V),$$

其中 $\wedge^i(V)$是 $T^i(V)$在商代数 $T(V)/I$ 中的像. 设 $v_1\wedge\cdots\wedge v_i\in\wedge^i(V)$是 $v_1\otimes\cdots\otimes v_i\in T^i(V)$在商代数中的像,我们可以定义 $\mathfrak{g}$ 在$\wedge^i(V)$上的作用使之成为一个 $\mathfrak{g}$ 模,若 $x\in\mathfrak{g}$,则有

$$x(v_1\wedge\cdots\wedge v_i)=xv_1\wedge\cdots\wedge v_i+\cdots+v_1\wedge\cdots\wedge xv_i .$$

其中$\wedge^0(V)\cong\mathbb{C}$是 $\mathfrak{g}$ 的平凡表示,$\wedge^1(V)\cong V$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自然表示.我们称$\wedge^i(V)$为第 i 级外幂. 如果 $v_1,\cdots,v_n$ 是 V 的一组基,那么 $v_{j1}\wedge\cdots\wedge v_{ji}(j1<\cdots<ji)$组成$\wedge^i(V)$的一组基,所以我们得出

$$\dim\wedge^i(V)=\binom{n}{i}=\frac{n!}{(n-i)!\ i!}.$$

我们就利用 $\mathfrak{g}$ 的自然表示的外幂来刻画 $\mathfrak{g}$ 的其他基本表示.

A_l 型:设 $\mathfrak{g}$ 为 A_l 型复单李代数,那么它的自然表示 V 的外幂$\wedge^i(V)(i=1,\cdots,l)$给出了 $\mathfrak{g}$ 的所有基本表示.

B_l 型:设 $\mathfrak{g}$ 为 B_l 型复单李代数,那么它的自然表示 V 的外幂 $\wedge^i(V)(i=1,\cdots,l-1)$都是 $\mathfrak{g}$ 的基本表示. $\mathfrak{g}$ 还有另外一个基本表示 $V(\lambda_l)$不在这些外幂之中,这个基本表示维数为 2^e,我们称之为半旋表示,它是由 Clifford 代数构造出的,我们将在§6.4 中详细讨论.

C_l 型:设 $\mathfrak{g}$ 为 C_l 型复单李代数,那么除了在 $i=0,1$ 时 $\wedge^i(V)$不是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. 对于$1\leqslant i\leqslant e-1$,我们有以下两个 $\mathfrak{g}$ 模同态:

$$\varphi: \wedge^{i-1}(V)\rightarrow \wedge^{i+1}(V),$$
$$\psi: \wedge^{i+1}(V)\rightarrow \wedge^{i-1}(V).$$

这里的 φ 是一个单同态,ψ 是一个满同态. 我们得出下面的分解

$$\wedge^{i+1}(V)=\mathrm{Ker}\psi\oplus\mathrm{Im}\varphi(i=1,\cdots,l-1).$$

而在$\wedge^{i+1}(V)$中的 $\mathrm{Ker}\psi$ 给出了自然表示之外的另外 $l-1$ 个基本表示.

D_l 型:设 $\mathfrak{g}$ 为 D_l 型复单李代数,那么它的自然表示的外幂 $\wedge^i(V)(i=1,\cdots,l-2)$给出 $l-2$ 个 $\mathfrak{g}$ 的基本表示. $\mathfrak{g}$ 还有两个基本表示 $V(\lambda_{l-1})$和 $V(\lambda_l)$不能在 V 的外幂中得出,它们的构造也要用到 Clifford 代数. 这两个表示维数相等,都是 2^{l-1},被称作是 $\mathfrak{g}$ 的半旋表示. 详细的构造将在§6.4 中给出.

例外李代数　设 $\mathfrak{g}$ 为五个例外单李代数之一. 设 $V(\omega)$是维数最小的一个 $\mathfrak{g}$ 的基本表示. 那么 $\mathfrak{g}$ 的其他的基本表示都是 $V(\omega)$张量幂的子模. 这个结论虽然有不少表示论的专家知道,但是却不容易在表示论的文献中找到. 我们将它叙述为下面的定理,其证明将推迟到第九章中给出.

定理　设 $V(\omega)$是例外单李代数 $\mathfrak{g}$ 的维数最小的非平凡表示.那么 $\mathfrak{g}$ 的任何有限维不可约表示都是 $V(\omega)$的某个张量幂

的子模.

根据我们在§4.6中对 Dynkin 图的标号,上面的基本权 ω 可以出现在下面的图表中.

$\mathfrak{g}$	ω	$\dim V(\omega)$
$\mathfrak{e}_6$	λ_1,λ_6	27
$\mathfrak{e}_7$	λ_7	56
$\mathfrak{e}_8$	λ_8	248
$\mathfrak{f}_4$	λ_4	26
$\mathfrak{g}_2$	λ_1	7

我们现在给出所有单李代数 $\mathfrak{g}$ 的基本表示的维数. 我们将这个维数标在其 Dynkin 图中基本权所对应的单根上.

$$(A_l)\quad \underset{1}{\overset{l+1}{\circ}} — \underset{2}{\overset{\binom{l+1}{2}}{\circ}} \cdots \underset{l-2}{\overset{\binom{l+1}{l-2}}{\circ}} — \underset{l-1}{\overset{\binom{l+1}{l-1}}{\circ}} — \underset{l}{\overset{l+1}{\circ}}$$

$$(B_l)\quad \underset{1}{\overset{2l+1}{\circ}} — \underset{2}{\overset{\binom{2l+1}{2}}{\circ}} \cdots \underset{l-2}{\overset{\binom{2l+1}{l-2}}{\circ}} — \underset{l-1}{\overset{\binom{2l+1}{l-1}}{\circ}} \Rightarrow \underset{l}{\overset{2^l}{\circ}}$$

$$(C_l)\quad \underset{1}{\overset{2l}{\circ}} — \underset{2}{\overset{\binom{2l}{2}-1}{\circ}} \cdots \underset{l-1}{\overset{\binom{2l}{l-1}-\binom{2l}{l-3}}{\circ}} \Leftarrow \underset{l}{\overset{\binom{2l}{l}-\binom{2l}{l-2}}{\circ}}$$

$$(D_l)\quad \underset{1}{\overset{2l}{\circ}} — \underset{2}{\overset{\binom{2l}{2}}{\circ}} \cdots \underset{l-3}{\overset{\binom{2l}{l-3}}{\circ}} — \underset{l-2}{\overset{\binom{2l}{l-2}}{\circ}} \begin{array}{l} \diagup \ \overset{2^{l-1}}{\circ}\ l-1 \\ \diagdown \ \overset{2^{l-1}}{\circ}\ l \end{array}$$

$$(E_6)\qquad \underset{27}{\circ} - \underset{\binom{27}{2}}{\circ} - \underset{\binom{27}{3}}{\overset{\overset{78}{\circ}\,|}{\circ}} - \underset{\binom{27}{2}}{\circ} - \underset{27}{\circ}$$

$$(E_7)\qquad \underset{133}{\circ} - \underset{8645}{\circ} - \underset{365750}{\overset{\overset{912}{\circ}\,|}{\circ}} - \underset{27664}{\circ} - \underset{1539}{\circ} - \underset{56}{\circ}$$

这里维数有如下关系: $8645=\binom{133}{2}-133$, $1539=\binom{56}{2}-1$, $27664=\binom{56}{3}-56$, $365750=\binom{56}{4}-\binom{56}{2}$.

$$(E_8)\qquad \underset{d_1}{\circ} - \underset{d_3}{\circ} - \underset{d_4}{\overset{\overset{d_2}{\circ}\,|}{\circ}} - \underset{d_5}{\circ} - \underset{d_6}{\circ} - \underset{d_7}{\circ} - \underset{d_8}{\circ}$$

这里的 $d_1=3875$, $d_2=147,250$, $d_3=3875$, $d_4=6,899,079,264$, $d_5=146,325,270$, $d_6=2,450,240$, $d_7=30380=\binom{248}{2}$, $d_8=248$.

$$(F_4)\qquad \underset{1}{\overset{52}{\circ}} - \underset{2}{\overset{1274}{\circ}} \Rightarrow \underset{3}{\overset{273}{\circ}} - \underset{4}{\overset{26}{\circ}}$$

$$(G_2)\qquad \underset{1}{\overset{7}{\circ}} \Lleftarrow \underset{2}{\overset{14}{\circ}}$$

§6.2 Clifford 代数

我们在上一节中提到，除了 $so(n,\mathbb{C})$ 的半旋表示之外，复单李代数 $\mathfrak{g}$ 中的基本表示都可以在维数最小的基本表示 V 的张量幂中得到.而半旋表示的构造需要用到 Clifford 代数.

设 V 为定义在实数域或复数域上的线性空间，设 Q 为定义在 V 上的对称双线性型.包含 V 而又是由 V 和 Q 生成的 Clifford 代数 $C(V,Q)$ 是一有单位 1 的满足下列关系的结合代数：

$$v\cdot v=Q(v,v)1,\qquad \forall v\in V.$$

这个等式给出的条件与下面等式给出的条件等价：

$$v\cdot w+w\cdot v=2Q(v,w)\cdot 1,\ \forall v,w\in V.$$

这二个条件的等价性可以用我们在 §4.1 中用到的所谓极化过程来证明，在 §4.1 我们用它证明了李代数定义中的(ii)与(ii)′两个条件等价.

Clifford 代数可以定义为满足上面条件的通用代数.也就是说，如果 E 是一个有单位的结合代数，而且存在一个线性映射 $j:V\to E$ 满足条件

$$j(v)^2=Q(v,v)1,\forall v\in V.$$

或者满足等价的条件

$$j(v)j(w)+j(w)j(v)=2Q(v,w)1,\forall v,w\in V,$$

那么一定存在着惟一的代数同态 $\varphi:C(V,Q)\to E$ 使得 φ 是 j 的扩张.

Clifford 代数可以用类似构造外代数的方法得到.设 $T(V)$

为 V 的张量代数，

$$T(V)=\mathbb{C}1\oplus V\oplus V\otimes V\oplus(V\otimes V\otimes V)\oplus\cdots.$$

设 $I=I(V,Q)$为 $T(V)$由元素 $v\otimes v-Q(v,v)1(v\in V)$生成的双边理想.定义 $C(V,Q)$为商代数 $T(v)/I$.那么 $C(V,Q)$具备上面所要求的通用性质,因而是我们想要的 Clifford 代数.

命题 设 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组基,那么 $e_{j_1},\cdots,e_{j_i}(j_1<\cdots<j_i)$再加上单位 1 构成 $C(V,Q)$的一组基.因此,

$$\dim C(V,Q)=\binom{n}{o}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n .$$

证明:因为 $e_ie_j+e_je_i=2Q(e_i,e_j)1$,所以 $e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_i}(j_1<j_2<\cdots<j_i)$再加上单位元素 1 的线性组合生成 $C(V,Q)$.我们还需要证明这些向量是线性无关的.设 F_k 为 $C(V,Q)$中由至多 k 个 V 中元素相乘的线性组合生成的子空间.那么 $C(V,Q)$可以用 F_k 过滤,也就是有

$$\mathbb{C}=F_0\subseteq F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_n=C(V,Q).$$

而且 F_k/F_{k-1}同构于外代数幂 $\wedge^k(V)$.实际上如果 Q 是一个恒为 0 的二次型,那么 $C(V,Q)$同构于外代数 $\wedge(V)$.这就证明了,$\dim C(V,Q)=2^n$.也就得到下面2^n 个向量$\{e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_i}\mid j_1<\cdots<j_i\}\cup\{1\}$是线性无关的.

因为 $I(V,Q)$是由度数为偶数的元素生成,这就诱导出在 Clifford 代数 $C=C(V,Q)=T(V)/I(V,Q)$上的一个模 2 的级配.设 C^+ 为 C 中由偶数个 V 中元素的乘积所张成的子空间,设 C^- 为 C 中由奇数个 V 中元素的乘积所张成的子空间.那么 C^+ 是一个维数为 2^{n-1}的 C 的子代数,而 C^- 则是 C^+ 的模.

因为 Clifford 代数 C 是结合代数,它还确定了一个李代数,

李括号的定义就是$[a,b]=ab-ba(a,b\in C)$.

§6.3 $so(n,\mathbb{C})$在 Clifford 代数中的嵌入

我们将分二步来构造 $so(n,\mathbb{C})$的半旋表示:

(i)我们先将 $so(n,\mathbb{C})$嵌入到 Clifford 代数 C 的偶子代数 C^+之中,这一步将在本节完成;

(ii)在下一节中我们确定 Clifford 代数与某个矩阵代数的同构,由此得出半旋表示.

设 V 为 n 维复线性空间,Q 为定义在 V 上的一个非退化二次型,从线性代数的知识可以知道所有这样的二次型除了相差一个数乘之外都是等价的.虽然这个数乘并不重要,为了方便计算我们还是选定一个二次型.

我们定义李代数 $so(V)$如下:

$so(V)=\{X\in \mathrm{End}(V)\mid Q(Xv,w)+Q(v,Xw)=0,\forall v, w\in V\}$.

我们下面将需要对 V 的维数 n 分别为偶数和奇数分开讨论.先假定 $n=2m$ 为偶数,这时我们可以选取 V 的一组基 $e_1,\cdots,e_n$ 使得

$$Q(e_i,e_{m+i})=Q(e_{m+i},e_i)=1\quad(i=1,\cdots,m),$$

而且

$$Q(e_i,e_j)=0,\text{如果 } j\neq i=m\ .$$

设 $v=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ 为 V 中任意一个向量,那么二次型 Q 可以写成

$$Q(v,v)=2(x_1x_{m+1}+x_2x_{m+2}+\cdots+x_mx_{2m}),$$

也就是说，Q 对应的矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}0 & I_m\\ I_m & 0\end{pmatrix}.$$

因此，$so(V)$同构于 $so(2m,\mathbb{C})$，也就是所有满足下列条件的 $2m\times 2m$ 复矩阵组成的复单李代数：

$$AT+TA^t=0\ .$$

再假定 $n=2m+1$ 为奇数，我们选定 V 的一组基使得二次型 Q 对应的矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_m\\ 0 & I_m & 0\end{pmatrix}.$$

因此，$so(V)$同构于 $so(2m+1,\mathbb{C})$，也就是所有满足下列条件的复矩阵所组成的复单李代数：

$$AT+TA^t=0\ .$$

对我们来说，用 $so(V)$对于构造半旋表示更为有利．我们现在来证明 $\wedge^2(V)$与 $so(V)$有一个明确的同构．

引理　我们用下面的映射将李代数 $so(V)$等同于 $\wedge^2(V)$．

$$\wedge^2(V)\to so(V),\qquad a\wedge b\longmapsto\varphi_{a\wedge b}.\qquad (a,b\in V)$$

这里的 $\varphi_{a\wedge b}$是 V 的自同态，定义为

$$\varphi_{a\wedge b}(v)=2Q(b,v)a-2Q(a,v)b\ .$$

证明　很容易验证我们有下列等式：

$$Q(\varphi_{a\wedge b}(v),w)+Q(v,\varphi_{a\wedge b}(w))=0\ .$$

由此得出，$\varphi_{a\wedge b}\in so(V)$．不难看出，$e_i\wedge e_{m+i}$所映射到自同态 $\varphi_{e_i\wedge e_{i+m}}$可以用斜对称矩阵 $2E_{ij}-2E_{m+i,m+j}$来表示．所以上述映射是一个同构．我们还需要知道在上述映射下所对应的 $\wedge^2(V)$中的李括号，这一点可以由下面的计算得出：

$$
\begin{aligned}
[\varphi_{a\wedge b},\varphi_{c\wedge d}](v) &= \varphi_{a\wedge b}\circ\varphi_{c\wedge d}(v) \\
&\quad - \varphi_{c\wedge d}\circ\varphi_{a\wedge b}(v) \\
&= 2\varphi_{a\wedge b}(Q(d,v)c - Q(c,v)d) \\
&\quad - 2\varphi_{c\wedge d}(Q(b,v)a - Q(a,v)b) \\
&= 4Q(d,v)(Q(b,c)a - Q(a,c)b) \\
&\quad - 4Q(c,v)(Q(b,d)a - Q(a,d)b) \\
&\quad - 4(Q(b,v)a - Q(c,a)d) \\
&\quad + Q(a,v)(Q(d,b)c - Q(c,b)d) \\
&= 2Q(b,c)\varphi_{a\wedge d}(v) - 2Q(b,d)\varphi_{a\wedge c}(v) \\
&\quad - 2Q(a,d)\varphi_{c\wedge b}(v) + 2Q(a,c)\varphi_{d\wedge b}(v).
\end{aligned}
$$

由此可知，

$$
\begin{aligned}
[a\wedge b, c\wedge d] &= 2Q(b,c)a\wedge d - 2Q(b,d)a\wedge c \\
&\quad - 2Q(a,d)c\wedge b + 2Q(a,c)d\wedge b\ .
\end{aligned} \tag{6.3a}
$$

这就确定了 $\wedge^2(V)$ 中的李括号.

命题 以下定义的映射 $\psi: \wedge^2(V)\to C(V,Q)$,

$$
\psi(a\wedge b) = \frac{1}{2}(a\cdot b - b\cdot a) = a\cdot b - Q(a,b)
$$

是一个李代数同态，显然 ψ 的像包含在 $C(V,Q)$ 的偶子代数 C^+ 之中.

证明 我们先来计算 Clifford 代数 $C(V,Q)$ 所生成的李代数中的李括号：

$$
\begin{aligned}
[a\cdot b, c\cdot d] &= a\cdot b\cdot c\cdot d - c\cdot d\cdot a\cdot b \\
&= (2Q(b,c)a\cdot d - a\cdot c\cdot b\cdot d) \\
&\quad - (2Q(a,d)c\cdot b - c\cdot a\cdot d\cdot b) \\
&= 2Q(b,c)a\cdot d - (2Q(a,d)c\cdot b - a\cdot c\cdot d\cdot b) \\
&\quad - 2Q(a,d)c\cdot b + (2Q(a,c)d\cdot b - a\cdot c\cdot d\cdot b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2Q(b,c)a\cdot d - 2Q(a,d)c\cdot b \\
&\quad - 2Q(a,d)c\cdot b + 2Q(a,c)d\cdot b \,.
\end{aligned}
$$

再与(6.3a)中$\wedge^2(V)$的李括号进行比较,我们就得出 ψ 是一个李代数同态.

§6.4 半旋表示

我们延用上一节的记号.我们先来考虑当 $n=2m$ 为偶数时$so(n,\mathbb{C})$的半旋表示.设 $V=W\oplus W'$为 V 的迷向子空间分解,也就是说二次型 Q 限制在子空间 W 或 W'都恒等于零.用我们在上一节中选取的 V 的一组基,迷向子空间可以表示为

$$W=\mathbb{C}\{e_1,\cdots,e_m\} \text{和 } W'=\mathbb{C}\{e_{m+1},\cdots,e_{2m}\}.$$

命题 V 的迷向子空间分解 $V=W\oplus W'$确定了以下代数同构

$$C(V,Q)\cong \mathrm{End}(\wedge W),$$

其中$\wedge W=\mathbb{C}\oplus W\oplus\wedge^2W\oplus\cdots\oplus\wedge^m W$ 为 W 的外代数.

证明 一个从 $C(V,Q)$到 $E=\mathrm{End}(\wedge W)$的代数同态等价于定义一个从 V 到E 的映射φ,并满足条件

$$\varphi(v)\varphi(w)+\varphi(w)\varphi(v)=2Q(v,w)1,\ \forall v,w\in V .$$

因为 V 有迷向子空间分解 $V=W\oplus W'$,所以我们可以将 φ 看作是在两个迷向子空间上的以下两个映射的直和,$\varphi_1: W\to E$ 和 $\varphi_2: W'\to E$,而且满足

$$\varphi_1(w)^2=0,\varphi_2(w')^2=0,(w\in W,w'\in W')$$

并且还满足

$$\varphi_1(w)\varphi_2(w')+\varphi_2(w')\varphi_1(w)=2Q(w,w')1,(w\in W,w'\in W).$$

对于任意的 $w\in W$,我们定义 $L_w\in E$ 为 $\wedge W$ 上的一个左乘映射,也就是说,

$$L_w(x)=w\wedge x,\ \forall x\in\wedge W.$$

对于任意的 $\theta\in W^*$,我们定义 $D_\theta\in E$ 为 $\wedge W$ 上的一个导子,它满足以下三个条件:

(i)$D_\theta(1)=0$;

(ii)$D_\theta(w)=\theta(w)\in\wedge^{\circ}W=\mathbb{C}$,for$w\in W=\wedge^1W$;

(iii)$D_\theta(x\wedge y)=D_\theta(x)\wedge y+(-1)^{\deg(y)}x\wedge D_\theta(y),\forall x,y\in\wedge W$.

更明确地说,对于 $W_1,\cdots,W_r\in W$,我们定义

$$D_\theta(w_1\wedge\cdots\wedge w_r)=\sum_{i=1}^{r}\theta(w_i)(w_1\wedge\cdots\wedge\hat{w}_i\wedge\cdots\wedge w_r).$$

我们可以利用 Q 得到 W'和 W^* 的一个一一对应,并且定义

$$\varphi_1(w)=L_w,\varphi_2(w')=D_\theta,$$

这里的 θ 由 $\theta(w)=2Q(w,w')$来确定.我们可以验证这样定义的 φ_1 和 φ_2 满足上面所要求的条件,这就完成了命题的证明.

利用上面命题所证明的同构 $C(V,Q)\cong\mathrm{End}(\wedge W)$,我们可以把 $\wedge W$ 看作是 $C(V,Q)$模.我们可以把外代数 $\wedge W$ 分解为奇偶两部分的直和

$$\wedge W=\wedge^+W\oplus\wedge^-W.$$

显然 $C(V,Q)$中的偶子代数 C^+ 保持这个分解,这就得出

$$C^+\cong\mathrm{End}(\wedge^+W)\oplus\mathrm{End}(\wedge^-W).$$

因此有

$$so(V)\subset C^+\cong\mathrm{End}(\wedge^+W)\oplus\mathrm{End}(\wedge^-W).$$

这样我们就得到了 $so(2m,\mathbb{C})$的两个表示 $\wedge^+W$ 和 $\wedge^-W$.这两个表示都称为是 $so(2m,\mathbb{C})$的半旋表示,它们的直和 $\wedge W$ 称

为是 $so(2m,\mathbb{C})$的旋量表示.

下面我们再来考虑当 $n=2m+1$ 为奇数时 $so(n,\mathbb{C})$的半旋表示.这时我们有以下分解

$$V=W\oplus W'\oplus\mathbb{C},$$

其中 W 和W'都是V 中m 维的迷向子空间.用上一节中选定的 V 的一组基,我们可以得出:

$$W=\mathbb{C}\{e_1,\cdots,e_m\},\quad W'=\mathbb{C}\{e_{m+1},\cdots,e_{2m}\}.$$

上面 V 的分解中出现的 1 维子空间$\mathbb{C}$是由 e_{2m+1}张成.类似于 n 为偶数的情形.我们也可以证明存在下面的同构

$$C(V,Q)\cong\mathrm{End}(\wedge W)\oplus\mathrm{End}(\wedge W').$$

这时 Clifford 代数 $C(V,Q)$中的偶子代数 C^+ 同构于 $\mathrm{End}(\wedge W)\cong\mathrm{End}(\wedge W')$.因此我们得出

$$so(V)\subset C^+\cong\mathrm{End}(\wedge W).$$

这样就得到了 $so(2m+1,\mathbb{C})$的一个半旋表示$\wedge W$.

第七章 紧李群导引

§7.1 流形与切空间

我们要用到光滑流形的概念来定义李群.一个 n 维流形 X 是一个局部同胚于欧氏空间$\mathbb{R}^n$的拓扑空间,也就是说,X 中任何一点 x 都有其一个邻域 U 与$\mathbb{R}^n$中的一个开集 W 同胚,这些同胚 $\varphi: U \to W$ 称为流形 X 的坐标卡.

一个 n 维的光滑流形是一个选定了坐标卡的流形,而这些选定的坐标卡 $\varphi_\alpha: U_\alpha \to W_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$必须满足下列条件:

(i) $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha = X$;

(ii) 对于任意的 α 和β,下面的过渡映射

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}; \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是光滑映射,也就是无穷次可微的.这些采集起来的坐标卡称为是流形 X 的图册.

例 1) 欧氏空间$\mathbb{R}^n$是一个光滑流形.

2) 我们现在来考虑 3 维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的单位球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

是一个光滑流形.

我们可以用以下六个开集覆盖 S^2:

$$U_1=\{(x,y,z)\mid x>0\}\cap S^2,$$
$$U_2=\{(x,y,z)\mid x<0\}\cap S^2,$$
$$U_3=\{(x,y,z)\mid y>0\}\cap S^2,$$
$$U_4=\{(x,y,z)\mid y<0\}\cap S^2,$$
$$U_5=\{(x,y,z)\mid z>0\}\cap S^2,$$
$$U_6=\{(x,y,z)\mid z<0\}\cap S^2 .$$

我们可以这样选取坐标卡 $\varphi_i: U_i\to W_i\subset\mathbb{R}^2$;

$$\varphi_1(x,y,z)=(y,z),\ \varphi_2(x,y,z)=(y,z),$$
$$\varphi_3(x,y,z)=(x,z),\ \varphi_4(x,y,z)=(x,z),$$
$$\varphi_5(x,y,z)=(x,y),\ \varphi_6(x,y,z)=(x,y).$$

所有的过渡映射都是光滑的,例如

$$\varphi_{13}(y,z)=((1-y^2-z^2)^{1/2},z).$$

3) 正交群 $O(3)$是这样定义的

$$O(3)=\{A\in M_3(\mathbb{R})\mid A^tA=I\},$$

它是在 $M_3(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^9$这个 9 维流形中的一个子流形.设

$$U=\{A\in O(3)\mid \det(A+I)\neq 0\},$$

则有一个一一对应:

$$\varphi: U\to W=so(3,\mathbb{R})=\{3\times 3\text{ 斜对称实矩阵}\}\cong\mathbb{R}$$

这个映射 φ 的定义是

$$\varphi(A)=(A+I)(A+I)^{-1}.$$

这样 $O(3)$可以由开集$\{gU\}$,$g\in O(3)$覆盖.其实我们只让 g 取值为以下 8 个对角矩阵中的一个

$$g=\begin{pmatrix}\pm 1 & & \\ & \pm 1 & \\ & & \pm 1\end{pmatrix}$$

就可以得到一个坐标卡,$\varphi_g: gU\to W$, $\varphi_g(A)=\varphi(g^{-1}A)$.

卡就组成 $O(3)$的一个图册.

多流形都是以欧氏空间的子流形的面目出现,就像$\mathbb{R}^{n+1}$
维球面S^n 一样.光滑流形的概念可以看作是光滑曲线
形)和光滑曲面(2 维流形)的推广.可以证明,所有光滑
可嵌入更高维的欧氏空间.但是,并非所有的流形都像球
自然地在欧氏空间中出现,实的射影空间就是一个例子.

1) 实射影空间$\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ 是由所有经过原点的$\mathbb{R}^n$ 中的直线
集合.$\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ 中的一个点可以用不全为零的 n 个齐性坐标
$,x_n)$来表示.如果 λ 是一个非零实数,那么$(\lambda x_1,\cdots,$
$x_1,\cdots,x_n)$表示$\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ 中同一个点.设 U_i 是下面定义的
)中的子集

$$U_i=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\neq 0\},$$

列映射 φ_i 是既单又满的一一对应

$$_i(x_1,\cdots,x_n)=(x_1x_i^{-1},\cdots,x_{i-1}x_i^{-1},x_{i+1}x_i^{-1},\cdots,$$

).

射

$$(x_1,\cdots,x_{n-1})=\frac{1}{x_j}(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,\hat{x}_j,\cdots,$$

是一个定义在 $\varphi_i(U_i\cap U_j)$上的光滑映射.这样就得出
是一个$n-1$ 维光滑流形.

) 我们可以推广实射影空间以定义 Grassmannian 流形
$\mathbb{R}^n$),这是一个由$\mathbb{R}^n$ 中所有 k 维子空间组成的集合.
$\mathbb{R}^n$)中的一个点 W,也就是$\mathbb{R}^n$ 中一个k 维子空间,可以用
$\times k$ 而且秩为k 的矩阵x 来表示,这个矩阵的列向量组
间 W 的一组基.如果 λ 是一个$k\times k$ 的可逆矩阵,那么
x 对应于$Gr_k(\mathbb{R}^n)$中同一个点.我们这样定义$Gr_k(\mathbb{R}^n)$的

一个图册;设 S 为$\{1,2,\cdots,n\}$中由 k 个元素组成的子集,用 U_s 来表示$Gr_k(\mathbb{R}^n)$中所有的矩阵 x 满足由对应于S 的k 个行和所有 k 个列组成的子矩阵 x_S 为可逆矩阵. 这样映射 $\varphi_S: x1\to xx_S^{-1}$ 定义了一个从 U_S 到所有$(n-k)\times k$ 矩阵构成的线性空间的一一对应,这是因为 xx_S^{-1} 中对应于S'的行与所有列组成的矩阵是一个单位矩阵. 过渡映射是一个从 $\varphi_S(U_S\cap U_T)$到$\varphi_T(U_S\cap U_T)$的映射,它可以写成

$$\varphi_{ST}: x\mapsto(a+bx)(c+dx)^{-1},$$

其中 $n\times n$ 矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$把对应$S$ 的行换为对应于T 的行的置换矩阵,我们令 a 为左上角的$(n-k)\times k$ 子矩阵,b 为右上角的$(n-k)\times(n-k)$子矩阵,c 为左下角的$k\times k$ 子矩阵,d 为右下角的 $k\times(n-k)$子矩阵. 这就得出过渡映射是光滑的,也就证明了 $Gr_k(\mathbb{R}^n)$为光滑流形.

在 n 维光滑流形X 上的每一个点x,我们都可以定义一个切空间 T_xX,这是一个 n 维的实线性空间. 我们上面提到任何光滑流形 X 都可嵌入欧氏空间$\mathbb{R}^N$,切空间 T_xX 可以看作是$\mathbb{R}^N$中的子空间,我们考虑所有的光滑曲线

$$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to x,\gamma(0)=x .$$

切空间 T_xX 就是由所有切向量$\gamma'(0)$构成的$\mathbb{R}^N$ 中的线性子空间.

例 1) 欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 在任何一点的切空间都同构于实线性空间$\mathbb{R}^n$.

2) 设 $X=S^2$ 为 3 维欧氏空间中的 2 维球面,那么在 $x\in X$ 的切空间就是 S^2 在 x 这一点的切平面,这个平面的法向量就是自原点到 x 的向量.

3) 设 $X=O(3)$是由 3×3 的正交矩阵生成的群,我们知道

X 是一个光滑流形. X 在单位元素的切空间 T_eX 是由 3×3 斜对称矩阵构成的 3 维线性空间. X 在任意一点 $g\in O(3)$的切空间就是 gT_eX .为了证明这一点,对任意一个斜对称矩阵 A 我们定义

$$e^{tA}=I+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$$

因为 $A^t=-A$,所以 A^t 与 A 交换,我们得到

$$(e^{tA})^t\cdot e^{tA}=e^{tA^t}\cdot e^{tA}=e^{tA^t+tA}=I\ .$$

因此有 $e^{tA}\in X$.这样 $\gamma(t)=ge^{tA}$定义了一条曲线满足

$$\gamma:\mathbb{R}\to X,\gamma(0)=g,\gamma'(0)=gA\ .$$

这就证明了 T_eX 是由斜对称矩阵生成的线性空间.现在设光滑曲线 γ 满足

$$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to X,\gamma(0)=g,$$

那么我们对 $\gamma^t\cdot\gamma=I$ 两边同时求导数,就得到

$$\gamma'(0)g+g^t\gamma'(0)=0\ .$$

因为 $g^t=g^{-1}$,所以由上式可以得出 $g^{-1}\gamma^1(0)$是一个斜对称矩阵.这就证明了 $T_gX\subset gT_eX$,又因为 T_gX 和 gT_eX 的维数相等,这两个线性空间只有相等.

§7.2 李群与李代数

一个李群是一个光滑流形 G 具有一个光滑映射 $G\times G\to G$,而这个映射作为乘法运算使 G 成为一个群.我们也可以这样定义李群:一个李群是一个群 G 具有光滑流形的结构,并且它的乘法映射 $G\times G\to G,(g,h)\mapsto gh$ 与逆映射 $G\to G^{-1}$,

$g \mapsto g^{-1}$都是流形上的光滑映射.

下面的定理用来确定李群十分有效,定理的证明可以在[Wa]中找到(定理3.42).

定理 设 G 为一个李群,H 为 G 的任意一个闭子群.那么 H 有一个惟一的光滑流形结构使得它成为一个李群.

例 一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$.这个群由所成 $n \times n$ 可逆实矩阵组成,它是由所有的 $n \times n$ 实矩阵组成的线性空间中的一个开集.它的光滑流形的结构可以利用矩阵元作为坐标来得到,因为矩阵的相乘与求逆都可以表示为矩阵元为变量的分式多项式,也就是说是光滑映射.更确切地说,设 x_{ij} 为 $n \times n$ 矩阵上取值为第 i 行第 j 列矩阵元的坐标函数,如果 $\sigma, \tau \in GL(n,\mathbb{R})$,那么 $x_{ij}(\sigma\tau^{-1})$是 $x_{kl}(\sigma)$和 $x_{kl}(\tau)$的分式函数,而且分母不为零.这就证明了$(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$是一个光滑映射,由此得出 $GL(n,\mathbb{R})$是一个李群.

2) 特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R})$. 这是由行列式为1的实矩阵组成的群. 因为它是 $GL(n,\mathbb{R})$的闭子群,所以它也是一个李群.

3) 正交群 $O(n)$. 这是由所有正交矩阵组成的群,也就是说,

$$O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^t A = I\}.$$

这也是 $GL(n,\mathbb{R})$的闭子群,因此是一个李群.我们记 $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$,显然 $SO(n)$也是李群.

设 M 为光滑流形.M 的切丛 $T(M)$定义为

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x M .$$

从切丛 $T(M)$到流形 M 有一个自然投影映射

$$\pi: T(M) \to M, \quad \pi(v) = x, \text{如果 } v \in T_x M .$$

可以证明 $T(M)$有一个由 M 诱导出的光滑流形结构,因此 $T(M)$也是一个光滑流形.

设 $\gamma:(a,b)\to M$ 为 M 上的光滑曲线.一个沿曲线 γ 的向量场 X 定义为一个提升 γ 到切丛 $T(M)$的映射 $X:(a,b)\to T(M)$ 满足 $\pi\circ X=\gamma$.一个定义在 M 中开集 U 上的向量场 X 是一个从 U 到切丛 $T(M)$的提升,也就是一个映射 $X:U\to T(M)$满足

$$\pi\circ X=\text{在 } U \text{ 的恒等映射}.$$

如果 X 和 Y 都是定义在M 上的向量场,那么 X 与 Y 的李括号 $[X,Y]=XY-YX$ 也是M 上的一个向量场. 容易验证,这样定义的李括号满足$[X,Y]=-[Y,X]$和 Jacobi 恒等式

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0,$$

对所有 M 上的向量场X,Y,Z 都成立. 因此,M 上的向量场组成一个李代数.

如果 M 和N 都是光滑流形,那么一个光滑映射 $f:M\to N$ 就诱导出切空间上的线性映射$df:T_xM\to T_{f(x)}N$ $(x\in M)$. 设 G 为李群,g 为G 中一个元素,由 g 定义的左平移映射L_g $G\to G,x\longmapsto gx$ 是一个光滑的可逆映射. 因此 L_g 诱导出切空间上的一个同构$dL_g:T_xG\to T_{gx}G$. 我们称 G 上的向量场X 是左不变换,如果它满足对所有的 $g\in G$,

$$dL_g\circ X=X\circ L_g .$$

我们用小写的德文字母 $\mathfrak{g}$ 表示所有 G 上左不变向量场的全体,可以通过计算得出

$$dL_g[X,Y]=[dL_gx,dL_gy].$$

因此,$\mathfrak{g}$ 对李括号是封闭的,所以 $\mathfrak{g}$ 为李代数,我们称 $\mathfrak{g}$ 为李群 G 的李代数. 因为 $\mathfrak{g}$ 中的向量场都是左不变的,我们可以建立一个$\mathfrak{g}$ 到 T_eG 的一一对应,所以作为线性空间来说,$\mathfrak{g}$ 与 T_eG 同构.

例 1)欧氏空间$\mathbb{R}^n$在向量加法的定义下是一个李群. 它的左不变向量场也就是

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \middle| a_i \in \mathbb{R}\right\} \cong \left\{(a_1, \cdots, a_n) \middle| a_i \in \mathbb{R}\right\} \cong \mathbb{R}^n,$$

其中任意两个向量场的李括号都为零.

2)一般线性群$GL(n,\mathbb{R})$的李代数是由所有 $n\times n$ 实矩阵组成的集合 $gl(n,\mathbb{R})$,李括号的定义是$[A,B]=AB-BA$. 因为矩阵的加法和数乘都可以分别在每一个矩阵元上进行,所以我们可以把 $gl(n,\mathbb{R})$看作 n^2 维欧氏空间. 前面曾经提到$GL(n,\mathbb{R})$作为 $gl(n,\mathbb{R})$中的一个开集,是由行列式不等于零的矩阵组成的,它的光滑流形结构是这样得到的:令 x_{ij} 为$gl(n,\mathbb{R})$上取值为第 i 行第j 列的矩阵元的坐标函数,如果 σ, $\tau\in GL(n,\mathbb{R})$,那么 $x_{ij}(\sigma\tau^{-1})$是 $x_{kl}(\sigma)$和 $x_{kl}(\tau)$的分式多项式且分母不为零. 也就是说,$(\sigma,\tau)\longmapsto\sigma\tau^{-1}$是一个光滑映射,这就得到 $GL(n,\mathbb{R})$上作为李群的光滑流形结构.

现在设 $GL(n,\mathbb{R})$的李代数是$\mathfrak{g}$,我们要证明$\mathfrak{g}$与$gl(n,\mathbb{R})$同构. 设 $\alpha: T_e gl(n,\mathbb{R})\to gl(n,\mathbb{R})$为这样一个映射,它把$gl(n,\mathbb{R})$在单位矩阵 e 这一点上切空间中的每一个切向量对应于$gl(n,\mathbb{R})$中的一个矩阵,这是一个自然的对应. 也就是说,如果 $v\in T_e gl(n,\mathbb{R})$,那么

$$\alpha(v)_{ij}=v(x_{ij}).$$

因为 $T_eGL(n,\mathbb{R})=T_egl(n,\mathbb{R})$,所以存在一个自然映射

$$\beta:\mathfrak{g}\to gl(n,\mathbb{R}),\beta(X)=\alpha(X(e))\quad(X\in\mathfrak{g}).$$

这个映射 β 显然是一个线性空间的同构. 我们要证明 β 而且是一个李代数的同构. 我们只需要验证

$$\beta([X,Y])=[\beta(X),\beta(Y)]\quad(\forall X,Y\in\mathfrak{g}).$$

如果 $g,h\in GL(n,\mathbb{R})$,那么

$$(x_{ij}\circ Lg)(h)=x_{ij}(gh)=\sum_k x_{ik}(g)x_{kj}(h).$$

因为 Y 为左不变向量场,所以我们得出

$$
\begin{aligned}
(Y(x_{ij}))(g) &= dL_g(Y_e)(x_{ij}) = Y_e(x_{ij} \circ L_g) \\
&= \sum_k x_{ik}(g) Y_e(x_{kj}) = \sum_k x_i k(g) \alpha(Ye)_{kj} \\
&= \sum_k x_{ik}(g) \beta(Y)_{kj}.
\end{aligned}
$$

那么 $\beta([X,Y])$的第(i,j)个矩阵元为

$$
\begin{aligned}
\beta([X,Y])_{ij} &= [X,Y]_e(x_{ij}) \\
&= X_e(Y(x_{ij})) - Y_e(X(x_{ij})) \\
&= \sum_k (X_e(x_{ik}\beta(Y)_{kj} - Y_e(x_{ik})\beta(X)_{kj}) \\
&= \sum_k (\beta(X)_{ik}\beta(Y)_{kj} - \beta(Y)_{ik}\beta(X)_{kj}) \\
&= [\beta(X), \beta(Y)]_{ij}.
\end{aligned}
$$

这就证明 β 为李代数同构.

3)设 V 是一个 n 维实线性空间. 设 End(V)为 V 到自身的所有线性变换构成的线性空间,设 Aut$(V)\subseteq$End(V)为 V 到自身的所有可逆的线性变换构成的群. 如果我们定义对于 End(V)任意两个元素 φ,ψ,

$$[\varphi,\psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi,$$

那么 End(V)是一个李代数. 假如我们固定 V 的一组基,那么就可以得到一个 End(V)与 $gl(n,\mathbb{R})$的同构,这个同构将 Aut(V)映射到 $GL(n,\mathbb{R})$. 也就是说,Aut(V)作为 End(V)的一个开集可以像 $GL(n,\mathbb{R})$在 $gl(n,\mathbb{R})$中一样有一个光滑流形的结构. 因此,Aut(V)是一个李群,其李代数是 End(V).

§7.3 指数映射

一个联系李代数 $\mathfrak{g}$ 与李群 G 的途径是指数映射,它可以通

过 G 的单参数子群来定义,这个单参数子群是指一个群同态 $\varphi:\mathbb{R}\to G$.

命题 对于任何李群 G,都有一个 G 的切空间 T_eG 到 G 的单参数子群的一一对应.

证明 如果 G 是一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$,那么这个一一对应是

$$\left\{A\in gl(n,\mathbb{R})\right\}\longleftrightarrow\left\{\varphi_A(t)=e^{tA}:\mathbb{R}\to G\right\}.$$

对于任意的一个李群 G,一个群的同态 $\varphi:\mathbb{R}\to G$ 确定了一个切向量 $\varphi^1(0)\in TeG$. 反之,设 $A\in T_eG$,我们可以用左平移定义 G 上的一个切向量 $X_A(g)=dL_gA$,我们需要证明 X_A 有惟一的解曲线 $\varphi:\mathbb{R}\to G,\varphi(0)=e$,而且 φ 是一个群同态.

由常微分方程的理论可知存在一个局部解

$$\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G,$$

这里的 $\varepsilon>0$,而且这个解是惟一的. φ 在它所定义的范围内满足 $\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s)$,这是因为 $t\longmapsto\varphi(t+u)$ 与 $t\longmapsto\varphi(t)\varphi(u)$ 都是 X_A 在 $t=0$ 取值为 $\varphi(u)$ 的解,由解的惟一性可知两者必相等. 我们还必须证明 φ 在整个实数域上都有定义. 设 $t\in\mathbb{R}$,那么当 n 足够大时 $\varphi(\frac{t}{n})^n$ 就有定义,这样 $\varphi(t)=\varphi(\frac{t}{n})^n$ 就有定义,这是因为这时值与 n 的选取无关,也就是说

$$\varphi(\frac{t}{n})^n=\varphi(\frac{t}{mn})^{mn}=\varphi(\frac{t}{m})^m.$$

指数映射

$$\exp:T_eG\to G$$

定义为

$$\exp(x)=\varphi_X(1),$$

其中 φ_X 是对应于 X 的单参数子群. 因此,指数映射是将 0 映

到 e，而且其微分为 $\mathfrak{g}=T_0\mathfrak{g}$ 到 $T_eG=\mathfrak{g}$ 上的恒等映射的惟一的从 $\mathfrak{g}$ 到 G 的映射.

例 1)设 $G=GL(n,\mathbb{R})$，则有 $\mathfrak{g}=gl(n,\mathbb{R})$. 任给 $X\in gl(n,\mathbb{R})$，指数映射

$$\exp(X)=e^X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}.$$

2)设 $G=SL(n,\mathbb{R})$. G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 是由迹为零的全体 $n\times n$ 实矩阵组成的线性空间，这是因为 $\det(e^{tA})=e^{\mathrm{trace}(tA)}$.

可以证明，如果 G 是一个紧致李群，也就是说作为流形 G 是紧致的，那么指数映射 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是一个满射. 对一般的李群来说，指数映射既不是单的，也不是满的. 但是，由反函数定理可知，在 G 的单位元素 e 的邻域上存在着指数映射的逆映射，我们用符号"log"来表示这个局部定义的逆映射.

例 设 $G=GL(n,\mathbb{R})$，$g\in G$. 那么

$$\log(g)=(g-I)-\frac{(g-I)^2}{2}+\frac{(g-I)^3}{3}-\cdots,$$

这是一个 $n\times n$ 实矩阵，$\log(g)$在 g 充分靠近 G 的单位元 I 时才有定义.

定理 设李群 G 和 H 的李代数分别为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$.

(i)如果 $\varphi:G\to H$ 是一个李群的同态，那么 $d\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一个李代数同态.

(ii)如果 G 是连通的，从 G 到 H 的两个李群同态 φ,ψ 满足 $d\varphi=d\psi$，那么 $\varphi=\psi$.

(iii)如果 G 是单连通的，而且存在一个李代数同态 $\psi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$，那么一定存在惟一的一个李群同态 $\varphi:G\to H$，使得 $d\varphi=\psi$.

我们略去定理的证明，读者可以参阅[Wa]中定理 3.14, 3.16 和 3.17，从而找到详细证明.

Ado 证明了任何一个李代数都可看成是某个 $gl(n,\mathbb{R})$ 的子代数(参阅[J′p199]),这就得出任给一个李代数 $\mathfrak{g}$,都存在一个李群 G 使得 G 的李代数就是 $\mathfrak{g}$. 再根据上面定理的第(iii)条我们有以下集合之间的一一对应:

$$\left\{\text{互不同构的李代数}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{互不同构的}\\ \text{单连通李群}\end{array}\right\}$$

设 V 为实的或复的线性空间. 设 $B=(\cdot,\cdot)$ 为定义在 V 上的一个二次型. 我们用 $A_B(V)$ 表示由所有保持 B 的 V 的自同构组成的集合,也就是说,

$$\begin{aligned} A_B(V)=\{\alpha\in \mathrm{Aut}(V) \mid (\alpha(v),\alpha(w)) \\ =(v,w),\forall\, v,w\in V\}. \end{aligned}$$

我们用 $\alpha_B(V)$ 表示由二次型 B 的导子组成的集合,也就是说,

$$\begin{aligned} \alpha_B(V)=\{\psi\in \mathrm{End}(V) \mid (\psi(v),w) \\ +(v,\psi(w))=0,\forall\, v,w\in V\}. \end{aligned}$$

命题 $A_B(V)$ 是 $\mathrm{Aut}(V)$ 的一个闭李子群,其李代数是 $\alpha_B(V)$.

证明 设 $\varphi,\psi\in\alpha_B(V)$,那么就有

$$\begin{aligned} ([\varphi,\psi]w,v) &=(\varphi\psi w,v)-(\psi\varphi w,v)\\ &=-(\psi w,\varphi v)+(\varphi w,\psi v)\\ &=(w,\psi\varphi v)-(w,\varphi\psi v)\\ &=-(w,[\varphi,\psi]v), \end{aligned}$$

也就是说

$$([\varphi,\psi]w,v)+(w,[\varphi,\psi]v)=0 .$$

由此得出 $[\varphi,\psi]\in\alpha_B(V)$,因而 $\alpha_B(V)$ 是 $\mathrm{End}(V)$ 的李子代数.

根据§7.2 中的定理,$A_B(V)$ 是 $\mathrm{Aut}(V)$ 的闭李子群,设其李代数为 α,我们需要证明 $\alpha=\alpha_B(V)$.

设 $X\in\alpha$,则有 $\exp(tX)\in A_B(V)$,也就是

$$(\exp(tX)v,\exp(tX)w)=(v,w).$$

我们在上式中对 t 求导再令 $t=0$,这就得出

$$(Xv,w)+(v,Xw)=0,$$

因而 $X\in\alpha_B(V)$. 这就证明了 $\alpha\subseteq\alpha_B(V)$.

反之,设 $X\in\alpha_B(V)$. 为了证明 $X\in\alpha$,我们需要证明 $\exp(tX)\in A_B(V)(t\in\mathbb{R})$. 我们可以将二次型 B 扩充到 $V\otimes V$ 上,定义 X 在 B 上的作用为

$$(X\circ B)(v,w)=(Xv,w)+(v,Xw).$$

这个作用可以表示为

$$X\circ B=B\circ(X\otimes 1+1\otimes X).$$

因此得到

$$X^n\circ B=B\circ(X\otimes 1+1\otimes X)^n,$$

所以有

$$e^{tX}\circ B=B\circ e^{t(X\otimes 1+1\otimes X)}.$$

因为 $X\otimes 1$ 与 $1\otimes X$ 在 $V\otimes V$ 上的作用是交换的,我们得出

$$\begin{aligned}e^{tX}\circ B&=B\circ e^{t(X\otimes 1)}\circ e^{t(1\otimes X)}\\&=B\circ(e^{tX}\otimes 1)\circ(1\otimes e^{tX})\\&=B\circ(e^{tX}\otimes e^{tX}).\end{aligned}$$

这就得到

$$(e^{tX}\circ B)(v,w)=(e^{tX}v,e^{tX}w).$$

因为 $X\in\alpha_B(V)$,所以有

$$X\circ B=0\quad 而且\quad X^n\circ B=0\quad(n\geqslant 1).$$

由此得出

$$\begin{aligned}(e^{tX}v,e^{tX}w)&=(e^{tX}\circ B)(v,w)=(id\circ B)(v,w)\\&=(v,w).\end{aligned}$$

这就证明了 $X\in\alpha$.

例 用上面的定理可以确定许多李群的李代数.

1)正交群 $O(n)$的李代数是

$$so(n)=\{X\in gl(n,\mathbb{R})\mid X+X^t=0\},$$

也就是所有斜对称矩阵组成的集合.

2)辛群$sp(2n,\mathbb{R})$的定义是

$$sp(2n,\mathbb{R})=\{A\in GL(2n,\mathbb{R})\mid AJA^t=J\},$$

其中 $J=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}$. 这是 $GL(2n,\mathbb{R})$中的闭李子群,其李代数是

$$sp(2n,\mathbb{R})=\{X\in gl(2n,\mathbb{R})\mid XJ+JX^t=0\}.$$

一般复线性群 $GL(n,\mathbb{C})$可以嵌入一般实线性群 $GL(2n,\mathbb{R})$中成为其闭子群. 设 $A+Bi\in GL(n,\mathbb{R})$,其中 $A,B\in GL(n,\mathbb{R})$,那么我们定义嵌入

$$A+Bi\longmapsto\begin{pmatrix}A & B\\ -B & A\end{pmatrix}.$$

不难验证这是一个单一的群同态映射. 因此 $GL(n,\mathbb{C})$是一个李群,现在我们列出 $GL(n,\mathbb{C})$的一些李群及其李代数.

例 1)酉群 $U(n)$定义为

$$U(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{C})\mid A\bar{A}^t=I\}.$$

它的李代数是

$$u(n)=\{A\in gl(n,\mathbb{C})\mid A+\bar{A}^t=0\},$$

也就是由所有反 Hermitian 矩阵组成的集合.

2)特殊复线性群 $SL(n,\mathbb{C})$定义为

$$SL(n,\mathbb{C})=\{A\in GL(n,\mathbb{C})\mid \det A=1\}.$$

它的李代数是

$$sl(n,\mathbb{C})=\{A\in gl(n,\mathbb{C})\mid \operatorname{trace}A=0\},$$

也就是由所有迹为零的复矩阵组成的集合.

3)复正交群 $O(n,\mathbb{C})$定义为

$$O(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid AA^t = I\}.$$

它的李代数是

$$so(n,\mathbb{C}) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) \mid A + A^t = 0\},$$

也就是所有斜对称复矩阵组成的集合.

§7.4 齐性空间

正像一般的群的概念是在人们对变换群充分认识的基础上建立起来的,李群的概念起源于连续变换群. 如果一个李群在一个拓扑空间上的作用是传递的,那么这个空间就称为齐性空间.

例 1)欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的单位球面S^{n-1}是一个在正交群$O(n)$作用之下的齐性空间.

2)欧氏空间$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$中的单位球面$S^{2n-1}$是在酉群$U(n)$作用之下的齐性空间.

3)实射影空间$\mathbb{PR}^{n-1}$是一个在特殊正交群$SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$作用之下的齐性空间.

4)复射影空间$\mathbb{PC}^{n-1}$是一个在特殊酉群$SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$作用之下的齐性空间.

5)设H为上半平面,也就是说$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. 那么$H$是在$SL(2,\mathbb{R})$作用之下的齐性空间. $SL(2,\mathbb{R})$中的一个矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的作用是

$$z \longmapsto (az+b)/(cz+d).$$

6)给定$\mathbb{R}^2$的一组基$\{v_1, v_2\}$,我们定义由$\{v_1, v_2\}$生成

的格为$\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$，这是$\mathbb{R}^2$中同构于$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$的一个子群．设$L$为$\mathbb{R}^2$中所有的格生成的空间，这是一个$GL(2,\mathbb{R})$作用之下的齐性空间．我们称一个格$\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$为幺模格，如果由$v_1$和$v_2$张成的平行四边形的面积为1，由所有的幺模格构成的空间L_1是L的一个子空间，L_1是在$SL(2,\mathbb{R})$作用之下的一个齐性空间．

7)Grassmannian流形$Gr_k(\mathbb{R}^n)$是在$GL(n,\mathbb{R})$作用之下的齐性空间．它也可以看作是$O(n)$作用之下的齐性空间，这是因为$Gr_k(\mathbb{R}^n)$中任何一个点，也就是$\mathbb{R}^n$一个k维子空间都有一组标准正交基，而且这个k维子空间的标准正交基可以扩充为$\mathbb{R}^n$的标准正交基．

如果一个群G在一个集合X上的作用是传递的，设G在某一点x_0的迷向子群为H，也就是$H=\{g\in G \mid g\cdot x_0 = x_0\}$，那么$X$与$H$在$G$中的左陪集有着一一对应的关系，也就是$gH \to gx_0$给出了$G/H$与$X$的一一对应．我们记之为$G/H \cong X$．我们对上面的例子逐一找出迷向子群．

1)球面$S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1)$．我们可以取$x_0$为$\mathbb{R}^n$中第$n$个标准基向量$e_n$，那么$O(n)$的迷向子群为$O(n-1)$．同理我们可以得出$S^{n-1} \cong so(n)/so(n-1)$．

2)球面$S^{2n-1} \cong U(n)/U(n-1)$．我们可以取$x_0$为$\mathbb{C}^n$中第$n$个标准基向量$e_n$，$U(n)$的迷向子群为$U(n-1)$．同理可以得出$S^{2n-1} \cong SU(n)/SU(n-1)$．

3)实射影空间$\mathbb{PR}^{n-1} \cong SO(n)/O(n-1)$．

4)复射影空间$\mathbb{PC}^{n-1} \cong SU(n)/U(n-1)$．

5)上半平面$H \cong SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$．我们可以取$x_0 = i$，$SL(2,\mathbb{R})$的迷向子群为$SO(2)$．

6)$\mathbb{R}^2$中所有格构成的空间$L \cong GL(2,\mathbb{R})/GL(2,\mathbb{Z})$，其

子空间 $L_1 \cong SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{Z})$.

7)Grassmannian 流形 $Gr_k(\mathbb{R}^n) \cong GL(n,\mathbb{R}) / GL(k,n-k)$.

这里的 $GL(k,n-k)$是 $GL(n,R)$中形状为$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$的矩阵生成的子群. 我们还可以得出

$$Gr_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n) / O(k) \times O(n-k).$$

一种特殊的齐性空间 G/H 是这样确定的,设 G 的自同构 α 是一个对合,也就是说 $\alpha^2 = 1$,令 H 为 α 的不变子群,亦即 $H = \{g \in G \mid \alpha(g) = g\}$. 这样得到的齐性空间 G/H 称为是对称空间. 我们上面讨论的例子中除了6)之外,其他的都是对称空间,对称空间已经有完全分类,这个分类对于表示论和几何都很重要.

§7.5 紧李群与极大环面

设 G 为紧致李群,我们简称为紧李群. 我们可以定义在 G 上的积分. 为了在可定向的流形 G 上积分,我们只要在 G 上每一点 g 定义一个体积元,也就是定义在 T_gG 中的一个 n 重线性形式. 这里的 n 是流形 G 的维数. 我们不妨先选定在单位元素上的值 w_e,然后再用左平移定义在其他点 g 上的值 $w_g \in T_gG$. 这样就给出了一个左不变的测度,这个测度除了相差一个常数倍之外是惟一确定的,我们进一步可以固定这个常数使得 G 的体积 $\int_G 1 = 1$. 这个测度称为 Haar 测定. 紧李群 G 的 Haar 测度同时在右平移下也是保持不变的,这是因为 G 中一个元素 h 的右平移变换对于积分的作用是乘以一个正实数

$\mu(h)$，这就得到一个群的同态 $\mu: G \to \mathbb{R}_+^\times$. 由于 G 是紧致的，映射 μ 一定是一个平凡映射，否则 μ 的像给出 $\mathbb{R}_+^\times$ 中的一个非平凡紧子群，但这是不可能的.

引理 设 G 为中心只有有限个元素的连通李群，设 G 的李代数为 $\mathfrak{g}_0$. 那么 G 是紧李群的充分必要条件是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型 $B(\cdot,\cdot)$ 是负定的.

证明 我们先选定 $\mathfrak{g}_0$ 上任意一个正定的内积，因为 G 是紧致的，通过用 G 上的积分来平均就得到一个在 G 的伴随作用之下不变的内积. 这里的伴随作用是通过对 G 在 G 上的共轭作用求微分得到的 G 在 T_eG 上的表示，也就是 G 在 $\mathfrak{g}_0$ 上的表示. 由于上述内积在 G 的作用下不变，那么作为微分 $ad(x)$ 在 $\mathfrak{g}_0$ 上的作用对应于斜对称矩阵 $A=(a_{ij})$，当然我们要选定一组标准正交基才有相应的矩阵. 这样就有

$$B(X,X)=T_r(A\circ A)=\sum_{i,j}a_{ij}a_{ji}=-\sum_{i,j}a_{ij}{}^2\leqslant 0,$$

由此得出 Killing 型是负定的.

反之，设 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型 B 是负定的，因而 $-B$ 在 $\mathfrak{g}_0$ 上定义了一个 G 不变的正定内积. $G/Z(G)$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_0)$ 中包含单位的连通分支，因而它是 $SO(n)$ 的一个闭子群，这里的 $n=\dim\mathfrak{g}_0$. 又因为 $Z(G)$ 是有限的，所以 G 是紧致的.

设 $\mathfrak{g}$ 为复李代数，一个实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 称为是 $\mathfrak{g}$ 的实形式，如果它满足 $\mathfrak{g}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathfrak{g}$. 反之，设 $\mathfrak{g}_0$ 为实李代数，我们称复李代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 为实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化. 如果 $\mathfrak{g}_0$ 是复李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个实形式，那么一定存在一个 $\mathfrak{g}$ 的对合，也就是一个阶为 2 的自同构 $\sigma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，使得 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}^\sigma$，这里 $\mathfrak{g}^\sigma$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中在 σ 作用下不变的元素. 我们只需要定义 σ 为下列映射：$X\otimes z\longmapsto X\otimes\bar{z}\,(X\in\mathfrak{g}_0, z\in\mathbb{C})$. 显然这个对合是复共轭线性的映射. 因此若要找出 $\mathfrak{g}$ 的所有实形式，我们只需要找出互不相同的复共轭线性的对合.

一个复李代数 $\mathfrak{g}$ 的实形式 $\mathfrak{g}_0$ 称为是紧实型,如果 $\mathfrak{g}_0$ 是一个紧李群的李代数,这也等价于 $\mathfrak{g}_0$ 上的 Killing 型是负定的.

命题 设$\mathfrak{g}$为复单李代数,那么一定存在$\mathfrak{g}$的一个紧实型$\mathfrak{g}_c$.

注 在证明 $\mathfrak{g}$ 的紧实型存在之前,我们先证明 $\mathfrak{g}$ 至少有一个实形式 $\mathfrak{g}_0$. 对于任何一个单根 α_i,设 $X_{\alpha_i}\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$ 为所对应的根子空间的生成向量,$X_{-\alpha_i}$ 为 $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ 的生成向量,令 $H_i=[X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}]$, 则有 H_i 为 Cartan 子代数 $\mathfrak{y}$ 中的元素, 而且 $\{H_i, X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i}\}$生成一个子代数$sl(2,\mathbb{C})$. 我们可以定义 $\mathfrak{g}_0$ 为由所有 $X_{\alpha_i}, H, X_{-\alpha_i}$生成的实李代数. 因为任何一个正根都是单根的非负整系数线性组合,我们可以确定

$$\{H_i, X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha, X_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}\}$$

是实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基. $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{y}_0$ 是由$\{H_1,\cdots,H_e\}$实系数线性组合生成. 我们一旦选定了一个 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{y}$,那么 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{y}_0$ 也随之确定. 这样 $\mathfrak{g}$ 的实形式 $\mathfrak{g}_0$ 也在同构的意义下确定,这是惟一的一个使 Cartan 子代数 $\mathfrak{y}_0$ 在 $\mathfrak{g}_0$ 上的作用都是实特征根的实形式,我们称之为分裂实型.

证明 我们证明可以从分裂实型$\mathfrak{g}_0$出发得到一个紧实型$\mathfrak{g}_c$. 设对应分裂实型 $\mathfrak{g}_0$ 的 $\mathfrak{g}$ 的对合为 σ . 因为 $\mathfrak{g}$ 有下列根子空间分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{y}\oplus\sum\mathbb{C}X_\alpha$,所以存在惟一的一个由映射 $\alpha\longmapsto-\alpha$ 诱导出的 $\mathfrak{g}$ 的自同构 φ,使得 $\varphi^2=id$,而且 φ 是复线性的,将 η 映到 η,X_α 映到$X_{-\alpha}$. 显然这个自同构是与 σ 交换的. 令 $\tau=\varphi\sigma=\sigma\varphi$ 为 φ 和 σ 的复合,那么 τ 是复共轭线性的对合. 设 $\mathfrak{g}_c$ 为 $\mathfrak{g}$ 中 τ 的不动点,那么 $\mathfrak{g}_c$ 的 Cartan 子代数为 $\mathfrak{y}_c=\mathfrak{y}^\tau=i\mathfrak{y}_0$. 因为所有的根在 $\mathfrak{y}_0$ 上取实值,所以 α 在 $\mathfrak{y}_c$ 上取值为纯虚数.

我们还需要证明 $\mathfrak{g}_c$ 的 Killing 型 B 是负定的．首先 Killing 型在 $\mathfrak{h}_c$ 上是负正定的，这是因为 α 在 $\mathfrak{h}_c$ 上取值为纯虚数．再者，因为

$$\begin{aligned}\alpha(H)B(X_\alpha,X_\beta)&=B([H,X_\alpha],X_\beta)\\&=-B(X_\alpha,[H,X_\beta]\\&=-\beta(H)B(X_\alpha,X_\beta),\end{aligned}$$

所以我们得出

$$B(X_\alpha,X_\beta)=0 \quad (\alpha+\beta\neq 0).$$

设 α 为任意正根，X 和 Y 分别为根子空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 和 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 的生成向量，令 $H=[X, Y]$，那么 $\{H,X,Y\}$ 生成 $\mathfrak{g}$ 的一个同构于 $sl(2,\mathbb{C})$ 的子代数．这个子代数显然在一映射下映到自身．我们记 $\mathfrak{l}_\alpha$ 为这个子代数中 τ 的不动点，我们只需要证明 $\mathfrak{g}_c$ 的 Killing 型 B 在 $\mathfrak{l}_\alpha$ 上是负定的．我们可以选取 $\mathfrak{l}_\alpha$ 的生成元为

$$iH, U=X-Y, V=iX+iY .$$

对于 U 和 V 的任意线性组合 $Z=aU+bV$，我们得到

$$\begin{aligned}&ad(Z)\circ ad(Z)\\&=(a+bi)^2ad(X)\circ ad(X)-(a^2+b^2)(ad(X)\circ ad(Y)+\\&\quad ad(Y)\circ ad(X))+(a-bi)^2ad(Y)\circ ad(Y).\end{aligned}$$

由于 $ad(X)\circ ad(X)$ 与 $ad(Y)\circ ad(Y)$ 的迹为零，所以有

$$T_r(ad(Z)\circ ad(Z))=-(a^2+b^2)T_r(ad(X)\circ ad(Y)).$$

通过直接计算可知对应于 $sl(2,\mathbb{C})$ 的 n 维不可约表示，$ad(X)\circ ad(Y)$ 在 H 的权为 μ 的子空间上的作用是乘以 $(n-\mu)(n+\mu-2)/4$．因此，$B(Z,Z)$ 一定为负，除非 $Z=0$．这就证明了 B 是负定的．最后，我们可以看出上述从 $\mathfrak{g}_0$ 得出 $\mathfrak{g}_c$ 的过程是可逆的，因而得到紧实型 $\mathfrak{g}_c$ 是惟一的．

注　给定复李代数 $\mathfrak{g}$ 的某个实形式 $\mathfrak{g}_0$ 和它相对应的 $\mathfrak{g}$ 的对合 σ，从上面命题的证明我们知道，存在一个与 σ 交换的 $\mathfrak{g}$ 的对

合τ,使得τ的不动点为紧实型$\mathfrak{g}_c$．因为$\tau(\mathfrak{g}_0)=\mathfrak{g}_0$,所以我们可以将$\tau$限制在$\mathfrak{g}_0$得到$\mathfrak{g}_0$的一个对合,这个对合称为$\mathfrak{g}_0$的Cartan对合．以下的分解

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0$$

称为Cartan分解,其中$\mathfrak{k}_0$和$\mathfrak{p}_0$分别为τ的特征值为1和-1的特征子空间．紧实型可以写成

$$\mathfrak{g}_c=\mathfrak{k}_0\oplus i\mathfrak{p}_0 .$$

下面我们列出典型复单李代数$\mathfrak{g}$的分裂实型$\mathfrak{g}_0$与紧实型$\mathfrak{g}_c$．

	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}_c$
Type A	$sl(n,\mathbb{C})$	$sl(n,\mathbb{R})$	$su(n)$
Type B	$so(2n+1,\mathbb{C})$	$so(n+1,n)$	$so(2n+1)$
Type C	$sp(2n,\mathbb{C})$	$sp(2n,\mathbb{R})$	$sp(2n)$
Type D	$so(2n,\mathbb{C})$	$so(n,n)$	$so(2n)$

我们称同构于$\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$的李群为环面,这里的$k$为正整数．李群$G$的子群$T$称为极大环面,如果$T$是一个环面而且不存在$G$中其他的环面$T'$使得$T\subsetneq T'$．

定理 设G为连通的紧李群,那么G中任意两个极大环面T与T'都是共轭的,而且G中任意一个元素都包含在某个极大环面之中．也就是说,存在$g\in G$,使得$T'=gTg^{-1}$而且有

$$G=\bigcup_{g\in G}gTg^{-1}.$$

上述定理对李群的结构理论和表示论都十分重要．例如利用这个定理,我们可以证明连通的紧李群的指数映射是满射．在这里我们只证明在$G=U(n)$为酉群时定理成立,对于一般群的证明,读者可以参阅[BD]第四章第一节．

证明 设$G=U(n)$,其对角矩阵是G的一个极大环面T．

显然 T 是G 中一个极大交换子群,事实上 G 的任意一个交换子群都共轭于 T 的某个子群,这一点可以从所有的酉矩阵都可以对角化而互相交换的酉矩阵可以同时对角化得到. 同样的证明也适用于正交群 $O(n)$.

设 T 为紧李群G 的极大环面. T 的正规化子群定义为

$$N(T)=\{g\in G \mid gTg^{-1}=T\}.$$

我们称商群 $N(T)/T=W$ 为G 的 Weyl 群,Weyl 群是一个有限群.

第八章　紧李群的表示

§8.1　紧李群的表示

紧李群的表示理论是在数学与理论物理许多分支中刻画对称性的有力工具. 紧李群的有限维表示与有限群的表示有很多相似之处,我们甚至可以将两者合在一起讨论,将有限群作为紧李群的某种特例. 在本书中我们先讨论有限群的表示,其目的是使初学者容易接受.

一个李群 G(并不只限于紧李群)在一个有限维复线性空间 V 上的表示定义为 G 在 V 上的一个连续的线性作用

$$\pi: G\times V\rightarrow V .$$

也就是说对任意的 $v\in V$, $g\longmapsto\pi(g)v$ 是 G 到 V 的连续映射;并且对每一个 $g\in G$, $\pi(g): v\longmapsto\pi(g)v$ 都是 V 上的线性变换.因为群 G 在集合 V 上的作用应该满足

$$\pi(e)=id,\pi(gh)=\pi(g)\pi(h)\quad(g,h\in G),$$

所以 G 在 V 上的表示 π 是一个连续同态 $\pi: G\rightarrow GL(V)$. 实际上可以证明如果 π 是连续的,那么它一定是光滑的(参阅[K]推论 3.16). 我们经常称 G 的一个表示为 G 模.

李群 G 在 V 上的表示称为是忠实的,如果对应的群同态

$\pi: G \to GL(V)$是单一的．李群 G 的不可约表示的概念类似于相应的有限群或李代数不可约表示的概念，也就是说是不含有非平凡 G 不变子空间的表示．下面关于不可约表示的 Schur 引理将经常用到，它的证明与 G 为有限群时的证明相似(参阅§2.1)．

Schur 引理　设 $\pi: G \to GL(V)$和 $\pi': G \to GL(V')$为李群 G 的二个不可约表示．如果存在着一个线性变换 $T: V \to V'$ 使得

$$\pi'(g)T(v) = T(\pi(g)v), \forall g \in G, v \in V,$$

那么 T 一定是一个同构或者是一个零映射．

如果我们进一步假设 $V = V'$，那么 T 一定是一个数乘映射．

李群 G 的一个表示(π, V)称为是酉表示，如果 V 上存在一个 G 不变的正定的 Hermitian 形式，也就是说 V 上存在一个正定的 Hermitian 形式$\langle , \rangle$满足

$$\langle \pi(g)u, \pi(g)v \rangle = \langle u, v \rangle \quad (\forall g \in G, u, v \in V).$$

定理　设(π, V)为紧李群 G 的一个表示．那么 V 上一定存在一个 G 不变的正定的 Hermitian 形式．

证明　这个定理的证明可以沿用§2.1 中证明有限群的表示都是酉表示的方法．我们先选定 V 上任意一个非退化而且是正定的 Hermitian 形式，然后通过在 G 上积分将其平均得到一个 G 不变的正定 Hermitian 形式．这里的证明只有一点与有限群的情况不同，就是需要在紧李群的积分．

命题　设(π, V)为紧李群 G 的有限维酉表示，设 W 为 V 的 G 不变子空间．那么 W 在 V 中的正交补 $W^{\perp}$也是 G 不变．所以 V 可以分解为二个表示 W 与 $W^{\perp}$的直和．

证明　命题的证明与§2.1 中当 G 为有限群时的证明完全相同．

推论 紧李群 G 的任何一个酉表示 (π, V) 都是完全可约的，也就是说 V 可以分解为不可约表示的直和.

设(π, V)为李群 G 的一个表示,我们定义其对偶表示或者逆步表示(π^*, V^*)为 G 在 V 的对偶空间 V^* 上的表示,满足

$$\langle V, \pi^*(g)^* \rangle = \langle \pi(g^{-1})V, V^* \rangle.$$

设 $v_1, \cdots, v_n$ 为 V 的一组基,$g \cdot v_j = \sum_i r_{ij}(g) v_i$;设 $v_1^*, \cdots, v_n^*$ 为对偶基,$g \cdot v_j^* = \sum_i s_{ij}(g) v_i^*$,那么就有

$$s_{ij}(g) = \langle v_i, g v_j^* \rangle = \langle g^{-1} v_i, v_j^* \rangle = \langle \sum_k r_{ki}(g^{-1}) v_k, v_j^* \rangle$$
$$= r_{ji}(g^{-1}).$$

也就是说对偶表示 π^* 对应的矩阵是 π 所对应的矩阵的逆加转置.

设(π, V)为李群 G 的一个表示,我们还可以定义其共轭表示$(\bar{\pi}, \bar{V})$如下:线性空间 $\bar{V}$ 作为集合与 V 完全相等,只是 $\bar{V}$ 的数乘运算是 V 上数乘运算的共轭

$$C \times V \to V, (z, v) \mapsto \bar{z} v .$$

我们称 G 的两个表示(π, V)与(π', V')是等价的,如果存在一个线性空间的同构 $\varphi: V \to V'$,使得

$$\varphi(\pi(g)v) = \pi'(g)\varphi(v), (\forall g \in G, v \in V).$$

引理 设 V 为李群 G 的酉表示. 那么它的对偶表示 V^* 与它的共轭表示 $\bar{V}$ 等价.

证明 设$\langle , \rangle$为 V 上的 G 不变 Hermition 的形式,那么下列映射

$$\bar{V} \to V^*, v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$$

就给出了所需要的线性空间同构.

§8.2 表示的 Weyl 酉转换

设 G 为紧李群,其李代数为 $\mathfrak{g}_0$. 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 为实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的复化. 我们在§5.5 中详细描述了复单李代数的有限维表示,而 Weyl 酉转换则将紧李群 G 的表示与 G 的复化李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示联系在一起.

如果 $\mathfrak{g}$ 是一个复单李代数,那么它有一个紧实型 $\mathfrak{g}_0$. 李代数为 $\mathfrak{g}_0$ 的单连通李群 G 是紧致的. 我们可以将 $\mathfrak{g}$ 的一个有限维表示限制在 $\mathfrak{g}_0$ 上,再用指数映射将 $\mathfrak{g}_0$ 的表示提升到 G 上,这就得到一个 G 的表示. 实际上,Weyl 酉转换还将 $\mathfrak{g}$ 的不同实形式的表示联系在一起,我们现在用 $g=sl(n,\mathbb{C})$为例,注意到

$$sl(n,\mathbb{C})=sl(n,\mathbb{R})+isl(n,\mathbb{R})=su(n)+i\,su(n).$$

命题 设 V 为有限维复线性空间. 下面任何一个在 V 上的表示对应于其他任何一个表示,在这种对应下,不变子空间对应于不变子空间、等价的表示对应于等价的表示:

(i) 李群 $SL(n,\mathbb{C})$的全纯表示;

(ii) 李群 $SL(n,\mathbb{R})$的表示;

(iii) 李群 $SU(n)$的表示;

(iv) 李代数 $sl(n,\mathbb{R})$的表示;

(v) 李代数 $su(n)$的表示;

(vi) 李代数 $sl(n,\mathbb{C})$的复线性表示.

证明 我们可以将(i)限制在相应的子群上得到(ii)或者(iii). 我们可以通过微分从(ii)得到(iv)或者从(iii)得到(v). 通过复化我们可以由(iv)或者是(v)得到(vi). 因为 $SL(n,\mathbb{C})$

是单连通的,所以通过指数映射我们可以从(vi)得到(i). 这样我们从(i)开始可以经过其他任何一个表示再回到(i),因为李群的同态由其微分惟一确定. 因此,不变子空间与等价性在这些对应下是被保持的.

根据上面的命题,我们马上得出 $SL(n,\mathbb{R})$ 与 $SL(n,\mathbb{R})$ 的所有有限维表示都是完全可约的, $SL(n,\mathbb{C})$ 的全纯表示也是这样.

酉转变这一术语的来历是因为在上面命题所列(iii)是紧李群的表示,它一定是一个酉表示.

表示的 Weyl 酉转换对其他形式的半单李群也成立,读者可以参阅[K]中第五章第三节.

作为 Weyl 酉转换的一个应用,我们可以由半单李代数的最高权定理得出相应的紧李群的最高权定理. 设 G 为紧李群,设 G 的李代数为 $\mathfrak{g}_0$,我们用 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_0\otimes\mathbb{C}$ 表示 $\mathfrak{g}_0$ 的复化. 设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数,设 Φ^+ 为一个正根集, π 是单根集,我们以前已经定义 $\mathfrak{h}$ 上的线性函数是整支配权,如果它满足对所有单根 $\alpha\in\pi$,都有

$$\frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in\mathbb{Z}_+.$$

定理(Cartan－Weyl) 设 G 为单连通的紧李群. G 的不可约表示的等价类与复化的李代数 $\mathfrak{g}$ 的整支配权一一对应.

例 设 $G=SU(n)$,则有 $\mathfrak{g}_0=su(n)$, 复化李代数 $\mathfrak{g}=sl(n,\mathbb{C})$. 令

$$\mathfrak{h}_0=\{\mathfrak{g}_0\text{ 中对角矩阵}\},$$

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0\oplus i\mathfrak{h}_0 .$$

记 E_{ij} 为第 (i,j) 个矩阵元为 1,其他矩阵元为 0 的矩阵. 设 e_i 为 $\mathfrak{g}$ 上的线性函数使得

$$e_i\begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_n \end{pmatrix} = h_i\ .$$

对于 $\mathfrak{g}$ 中任意一个元素 H，我们有

$$(ad\ H)E_{ij} = [H, E_{ij}] = (e_i(H) - e_j(H))E_{ij}.$$

所以 E_{ij} 是所有 $ad(H)$ 的共同特征向量，其特征根为 $e_i(H) - e_j(H)$．我们称 $e_i - e_j$ 为根，E_{ij} 为根向量．根集 $\Phi = \{e_i - e_j \mid, i \neq j\}$．根子空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{i \neq j} E_{ij}.$$

设 $\varphi: G \to GL(V)$ 为 G 在有限维复空间 V 上的表示．设 $d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ 为 φ 的微分．如果 $H, \cdots, H_l$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一组基，那么 $d\varphi(H_i)$ 是一组线性变换，可以同时对角化．对于任意一个 $\lambda \in \mathfrak{h}'$，定义

$$V_\lambda = \{v \in V \mid d\varphi(H)v = \lambda(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

如果 $V_\lambda \neq 0$，我们称 λ 为 V 的一个权，对应的子空间 V_λ 称为权空间．显然，V 只有有限个权而且 V 可以分解为权空间的直和：

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda,$$

以上求和是对 V 的所有权．

$SU(n)$ 的不可约表示的等价类与它整支配权一一对应，也就是与以下集合一一对应：

$$\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0\}.$$

一般来说，绝大多数半李代数的表示的定理都可以用不同的两种途径来证明，一种是利用李代数的结构理论直接证明，另一种则是利用 Weyl 酉转换而证明其相应的紧李群表示的定理．

§8.3 $SU(2)$与$SO(3)$的表示

上一节中所提到的群都是单连通的,我们自然要问,如果紧李群 G 不是单连通,又将如何研究它的表示. 设 G 是连通的,其李代数为 $\mathfrak{g}_0$,那么 G 的通用覆盖群$\tilde{G}$是一个单连通的紧李群,$\tilde{G}$的李代数也是 $\mathfrak{g}_0$. 因而 $\tilde{G}$的不可约表示可以用整支配权作参数来刻画. 群 G 同构于商群G/Z,其中 Z 是一个包含在G的中心之内的正规子群. 群 G 的表示等同于那些$\tilde{G}$的表示 π 使得$\pi(z)$的作用是平凡的,而那些 $\tilde{G}$的表示 π 使得$\pi(z)$的作用不平凡的称为 G 的投影表示.

在本节中我们将以 $SU(2)$和 $SO(3)$为例,比较$\tilde{G}$的表示与 G 的表示的相同与差异. $SU(2)$是由所有 2×2 的行列式为 1 的酉矩阵组成的群,它的元素可以写成

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

其中 a,b 都是复数,而且$|a|^2+|b|^2=1$. 我们在§1.1 中引入了四元数$\mathbb{H}$的概念. 而 $SU(2)$恰好与所有模为 1 的四元数组成的群$\{x_0+x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}\}$, $x_0,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$, $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$同构. 所以 $SU(2)$与 3 维球面同胚,是单连通的.

特殊正交群 $SO(3)$是由所有$\mathbb{R}^3$ 上的旋转组成的群. 为了找出 $SU(2)$与 $SO(3)$的关系,我们将一个四元数 q 分解为实部与向量部之和,也就是 $q=t+v$, $t\in\mathbb{R}$, $v\in\mathbb{R}^3$. 在这个分解

之下,四元数的乘法可以表示为

$$(t_1+v_1)(t_2+v_2)=(t_1t_2-\langle v_1,v_2\rangle)+(t_1v_2+t_2v_1+v_1\times v_2),$$

其中$\langle v_1,v_2\rangle$是内积,$v_1\times v_2$ 是矢量积.我们用$\mathbb{H}^*$ 表示所有模为 1 的四元数组成的群,$\mathbb{H}^*$ 在四元数$\mathbb{H}$ 上有一个作用:

$$\mathbb{H}^*\times\mathbb{H}\to\mathbb{H},(q,x)\to qxq^{-1}.$$

一个四元数 $x=x_o+x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ 的模定义为 $N(x)=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$. 不难看出它满足 $N(xy)=N(x)N(y)$. 因为 $N(qxq^{-1})=N(q)N(x)N(q^{-1})=N(x)$,而且$\mathbb{H}^*$ 的作用保持实部不变,所以$\mathbb{H}^*$ 的作用也保持实部的正交补—向量部. 这样我们就得到了一个$\mathbb{H}^*$ 在$\mathbb{R}^3$ 上的作用. 由此得出以下映射:

$$\pi:SU(2)\to SO(3),\pi(q)(v)=qvq^{-1},$$

其中 $q\in SU(2),v\in\mathbb{R}^3$. 更精确地说,如果 u 是$\mathbb{R}^3$ 中的向量,那么 $q=\cos\theta+u\sin\theta$ 是$\mathbb{H}$ 中的一个单位(模为 1 的元素),$\pi(q)$ 是$\mathbb{R}^3$ 关于以 u 为轴旋转 2θ 角度的线性变换. 因此,π 是一个满同态,也就得出 π 是覆盖映射. 不难验证,π 的核为$\{\pm I\}$,因为$\pm q$ 给出相同的旋转变换.

我们因而得出 $SU(2)$是 $SO(3)$的一个双重覆盖. $SO(3)$的不可约表示与那些 $SU(2)$的满足 $-I$ 的作用为平凡的不可约表示一一对应. 由于 $SU(2)$是单连通的,所以 $SU(2)$的不可约表示与 $sl(2,\mathbb{C})$的不可约表示一一对应,也就是由其表示的维数完全确定(参阅§5.2). 我们下面给出 $SU(2)$每一不可约表示的等价类一种具体的实例.

设 V_n 为所有由 z_1,z_2 生成的次数为 n 的二元齐次多项式组成的线性空间,也就是 V_n 由一组基$\{z_1^n,z_1^{n-1}z_2,\cdots,z_2^n\}$生成,因此 V_n 的维数为 $n+1$. 如果把这些二元齐次多项式看作

是$\mathbb{C}^2$上的函数，我们定义$sl(2,\mathbb{C})$和$SU(2)$在一个二元多项式$p\in\mathbb{C}[z_1,z_2]$上的作用为

$$(gp)(z)=p(zg),$$

这里的$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$z=(z_1,z_2)$，$g$在$z$上的作用是

$$zg=(az_1r+cz_2,bz_1+dz_2).$$

因此，V_n是$SU(2)$的不可约表示，其中V_0是1维的平凡表示，V_1是2维的自然表示．$SU(2)$的元素$-I$在V_n上作用是平凡的当且仅当V_n是由所有偶次的齐性多项式组成，也就是当且仅当n是一个偶数．换言之，所有V_{2n}都是$SO(3)$的不可约表示．

我们可以进一步算出V_n的最高权．紧李群$G=SU(2)$的李代数为$\mathfrak{g}_0=SU(2)$，其复化为$\mathfrak{g}=sl(2,\mathbb{C})$．$\mathfrak{g}$的Cartan子代数$\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}\right\}$．如果$(\pi_n,V_n)$是$\mathfrak{g}$在齐性多项式空间

$$\{a_nz_1^n+a_{n-1}z_1^{n-1}z_2+\cdots+a_0z_2^n\}$$

上的表示，那么$\pi_n\left\{\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}\right\}$的权空间是

$$\mathbb{C}z_1^n,\mathbb{C}z_1^{n-1}z_2,\cdots,\mathbb{C}z_2^n,$$

所对应的权是

$$ne_1,(n-2)e_1,\cdots,-ne_1.$$

最高权是ne_1．

§8.4 特　征

紧李群表示的特征理论提供了一个深入了解表示结构的工

具．有关紧李群表示的特征的定理几乎同相应的有限群表示的特征的定理相同，只是在证明中需要一些变更．设(π, V)为紧李群 G 的一个有限维表示，其特征 $\chi: G \to \mathbb{C}$ 定义为

$$\chi(g) = \mathrm{trace}(\pi(g)).$$

如果我们选定 V 的一组基，设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为所对应的矩阵 $\pi(g)$ 的特征值，那么 $\chi(g) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$．这个定义显然与基的选取无关．因为改变一组基，并不改变 $\pi(g)$的特征值．

命题 设 χ_V 为紧李群 G 的有限维表示(π, V)的特征，那么，

(i) $\chi_V(e)$等于 V 的维数；

(ii) $\chi_V(g) = \chi_V(hgh^{-1})$对任意 $g, h \in G$ 都成立；

(iii) $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)} = \chi_V(g^{-1})$对任意 $g \in G$ 都成立，这里的 V^* 是 V 的对偶表示；

(iv) 如果 $\chi_{V'}$是 G 的另一个表示(π', V')的特征，那么直和表示$(\pi \oplus \pi', V \oplus V')$的特征是 $\chi_V + \chi_{V'}$；

(v) 张量积表示$(\pi \otimes \pi', V \otimes V')$的特征是 $\chi_V \cdot \chi_{V'}$．

证明 我们选定V的一组基，不妨将$\pi(g)$视为相应的矩阵．因为$\chi_V(e) = \mathrm{trace} I = \dim V$，这就得到性质(i)．因为$\pi(hgh^{-1}) = \pi(h)\pi(g)\pi(h^{-1})$，所以$\mathrm{trace}\,\pi(hgh^{-1}) = \mathrm{trace}\,\pi(h)\pi(g)\pi(h^{-1}) = \mathrm{trace}\,\pi(g)$，所以公式(ii)成立．公式(iii)的证明要用到 V 的对偶表示 V^* 与 V 的复共轭表示 $\overline{V}$ 是同构的(参阅§8.1 中的引理)，这是因为 V 可以看作是酉表示．因此，$\pi^*(g)$的特征值与$\overline{\pi(g)}$的特征值相同，所以 $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi(g)}$．又因为 $\pi_{V^*}(g)$对应的矩阵是 $\pi(g)$对应矩阵的转置逆，所以有 $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$．为了证明性质(iv)和(v)，我们也选定 V'的一组基，设 $\pi'(g)$所对应的矩阵的特征值为 μ_1，

$\cdots,\mu_m$，这样$(\pi\oplus\pi')(g)$的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\mu_1,\cdots,\mu_m$，$(\pi\otimes\pi')(g)$的特征值为$\{\lambda_i\mu_j \mid i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,m\}$．所以，$\pi\oplus\pi'$的特征$\chi_{V\oplus V'}$在 g 的值为

$$\chi_{V\oplus V'}(g)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n+\mu_1+\cdots+\mu_m=\chi_V(g)+\chi_{V'}(g);$$

$\pi\otimes\pi'$的特征 $\chi_{V\otimes V'}$在 g 取值为

$$\chi_{V\otimes V'}(g)=\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j=(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(\mu_1+\cdots+\mu_m)=\chi_V(g)\cdot\chi_{V'}(g).$$

如果一个复函数 $f:G\to\mathbb{C}$ 在 G 的每一个共轭类都取相同的值，那么我们称 f 为类函数．一个类函数可以看作是定义在 G 的共轭类上的函数．从上面命题中所得到的表示的特征的性质(ii)可以看出，所有表示的特征都是类函数．我们可以在全体类函数的空间上定义一个 Hermitian 内积

$$\langle\chi,\chi'\rangle=\int_G\overline{\chi}(g)\chi'(g)\mathrm{d}g .$$

这里在 G 上的积分已经正规化使得 $\int_G \mathrm{d}g=1$ ．以上定义的 Hermitian 内积对于讨论紧李群表示的特征十分重要．

定理　设 G 为紧李群，V 和 W 为 G 的有限维表示．那么，

(i) $\int_G\chi_V(g)\mathrm{d}g=\dim V^G$;

(ii) $\langle\chi_V,\chi_W\rangle=\dim \mathrm{Hom}_G(V,W)$;

(iii)如果 V 和 W 都是不可约的，那么

$$\langle\chi_V,\chi_W\rangle=\begin{cases}1,\text{如果 } V\cong W;\\0,\text{如果 } V\ncong W .\end{cases}$$

证明　如果 V 是 G 的一个表示，那么 G 不变的向量

$V^G=\{v\in V \mid gv=v, \forall g\in G\}$

是 V 的一个子空间. 我们定义映射

$$\varphi: V \to V; v \mapsto \int_G gv\mathrm{d}g .$$

这个映射 φ 是 G 等变的,也就是

$$x\varphi = \varphi x, \forall x \in G,$$

这是因为在定义所用的 G 上的积分是 G—不变的. 因此,映射 φ 的核与像都是 V 的子表示.

我们先证明 φ 是从 V 到 V^G 的投影映射. 设 $v = \varphi(w)$, 那么

$$hv = \int_G hgw\mathrm{d}g = \int_G g'w\mathrm{d}g' = \varphi(w) = v .$$

如果 $v \in V^G$,那么 $\varphi(v) = \int_G gv\mathrm{d}g = v$. 所以 V^G 包含在 φ 的像中, 而且 $\varphi \circ \varphi = \varphi$. 这就证明了 φ 是投影映射. 由此可知,

$$\dim V^G = \mathrm{trace}\varphi = \int \mathrm{trace}\pi(g)\mathrm{d}g = \int_G \chi(g)\mathrm{d}g . \qquad (8.4a)$$

这就证明了公式(i).

设 V 与 W 为 G 的两个表示,那么

$\mathrm{Hom}(V, W)^G = \{G$ 等变的从 V 到 W 的线性变换$\}$,这个空间通常记为 $\mathrm{Hom}_G(V, W)$. 如果 V 和 W 都是不可约的,由 Schur's 引理,我们得出

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1, \text{如果 } V \cong W; \\ 0, \text{如果 } V \ncong W . \end{cases} \qquad (8.4b)$$

注意到 $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ 也是 G 的一个表示,利用本节中命题所证明的性质(iii)和(v)我们得出

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} = \overline{\chi_V(g)} \cdot \chi_W(g).$$

再利用上面的公式(8.4a)就得到,

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \int_G \overline{\chi_V(g)} \cdot \chi_W(g) \mathrm{d}g = \dim \mathrm{Hom}_G(V, W).$$

这就证明了(ii). 利用(ii)和等式(8.4b)就得出

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 1, \text{如果 } V \cong W; \\ 0, \text{如果 } V \not\cong W . \end{cases}$$

这就完成了定理的证明.

推论 1 G 的任意一个有限维表示(π, V)由它的特征 χ_V 完全确定. 实际上, V 可以分解为不可约表示的直和

$$V = n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_r V_r,$$

而不可约表示 V_i 在 V 中出现的重数 $n_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$.

证明 V 的特征 $\chi_V = n_1 \chi_{V_1} + \cdots + n_r \chi_{V_r}$. 应用定理中所证性质(iii),也就是不可约表示的特征是互相正交的就得出 $n_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$.

推论 2 G 的有限维表示(π, V)是不可约的当且仅当它的特征 χ_V 满足关系$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

证明 如果 $\chi_V = n_1 \chi_{V_1} + \cdots + n_r \chi_{V_r}$,那么$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = n_1^2 + \cdots + n_r^2$. 所以$\langle \chi_V, \chi_V \rangle$只有在某个 n_i 为 1 其他均为 0 时才等于 1,也就是$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ 当且仅当 V 是不可约的.

§ 8.5 Peter – Weyl 定理

一个具有深远影响的数学定理是由 Fourier 证明的,这个定理指出,任意一个定义在 $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ 上的平方可积函数可以分解为 Fourier 级数:

$$f(\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n e^{\mathrm{i}n\theta},$$

其中 Fourier 系数 a_n 是由下面的积分所确定

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}f(\theta)e^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta .$$

Peter - Weyl 定理就是 Fourier 级数在紧李群上的推广.

设(π,V)为紧李群 G 的表示,设(π^*,V^*)为它的对偶表示. 对于 $v\in V$ 和 $v^*\in V^*$,我们称下面的 G 上的函数

$$f(g)=\langle\pi^*(g)v^*,v\rangle$$

为表示 V 的矩阵系数. 矩阵系数也常常称为 G 的表示函数.

如果 V 是 G 的一个酉表示,设$\langle,\rangle$为 V 上的一个 G 不变 Hermitian 形式,那么我们知道 $V^*\cong\overline{V}$(参阅§8.1 中引理),因此得出 V 的矩阵系数可以写成

$$f(g)=\langle gv,w\rangle,\quad v,w\in V .$$

设 $C(G)$为 G 上所有连续函数组成的代数,G 的所有矩阵系数生成$C(G)$的一个子代数 $C_0(G)$. 如果我们用 $f_v(g)=\langle gv_1,v_2\rangle(v_1,v_2\in V)$来表示一个 G 的表示 V 的矩阵系数,那么

$$f_v(g)+f_w(g)=\langle gv_1,v_2\rangle+\langle gw_1,w_2\rangle \tag{8.5a}$$

是表示 $V\oplus W$ 的矩阵系数,而

$$f_v(g)\cdot f_w(g)=\langle gv_1,v_2\rangle\cdot\langle gw_1,w_2\rangle \tag{8.5b}$$

是表示 $V\otimes W$ 的矩阵系数. 另外若有 $\lambda\in\mathbb{C}$,则有

$$\lambda f_v(g)=\lambda\langle gv_1,v_2\rangle=\langle g\lambda v_1,v_2\rangle.$$

命题 设 V 和 W 为 G 的两个不可约酉表示,那么对于任意的 $v_1,v_2\in V$ 和 $w_1,w_2\in W$,都有

$$\int_G\langle gv_1,v_2\rangle\overline{\langle gw_1,w_2\rangle}\mathrm{d}g=\begin{cases}0,\text{如果 } V\cong W;\\ \dfrac{1}{\dim V}\langle v_1,v_2\rangle\langle w_1,w_2\rangle,\text{如果 } V=W .\end{cases}$$

证明 设 V 与 W 是 G 的两个互不同构的不可约表示. 因

为$\overline{\langle gw_1, w_2\rangle} = \langle w_1, gw_2\rangle$,所以以下积分

$$\int \langle gv_1, v_2\rangle \overline{\langle gw_1, w_2\rangle} dg$$

是关于 w_2 线性关于 v_2 共轭线性的．我们固定 $v_1 \in V, w_1 \in W$,这个积分定义了一个双线性型 $b:\overline{V}\times W \to \mathbb{C}$．因为上述 G 上的积分是 G 不变的,所以 b 是 G 等变的．因此,b 定义了一个 G 等变的映射

$$\varphi: W \to \mathrm{Hom}(\overline{V}, \mathbb{C}).$$

由于 $\mathrm{Hom}(\overline{V}, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{C} \cong (V^*)^* \cong V)$,所以从 Schur 引理可以得出 φ 一定为零映射．

现在设 $V = W$ 为一个不可约酉表示,如果 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$,我们将会得到

$$\int_G (g\cdot\varphi) dg = \frac{1}{\dim V}\mathrm{Tr}(\varphi) idV .$$

这是因为上式左边的积分定义了一个 G 等变的 V 上的映射,应用 schur 引理可知这个映射是一个常数 G 乘以恒等映射 idV .我们通过取迹 $\mathrm{Tr}:\mathrm{End}(V) \to \mathbb{C}$ 来计算常数 C,因为取迹是线性映射且与积分交换,所以有

$$\begin{aligned} \dim V \cdot c &= \int_G (g\cdot\varphi) dg \\ &= \int_G \mathrm{Tr}(l_g \circ \varphi \circ l_g^{-1}) dg \\ &= \int_G \mathrm{Tr}(\varphi) dg = \mathrm{Tr}(\varphi). \end{aligned}$$

因此得到

$$\int_G g\varphi(g^{-1}w_2) dg = \frac{1}{\dim V}\mathrm{Tr}(\varphi) w_2 . \qquad (8.5c)$$

利用积分是线性的,我们将(8,5c)两边同时与 v_2 作内积就

得出

$$\int_G \langle g\varphi(g^{-1}w_2), v_2\rangle \mathrm{d}g = \frac{1}{\dim V}\mathrm{Tr}(\varphi)\langle w_2, v_2\rangle$$

$$= \frac{1}{\dim V}\mathrm{Tr}(\varphi)\overline{\langle v_2, w_2\rangle}.$$

令 φ 为下面公式定义的线性映射

$$v \mapsto \langle v, w_1\rangle v_1,$$

这样 φ 的迹为$\langle v_1, w_1\rangle$,所以有

$$\int_G \langle\langle g^{-1}w_2, w_1\rangle g v_1, v_2\rangle \mathrm{d}g = \frac{1}{\dim V}\langle v_1, w_1\rangle\overline{\langle v_2, w_2\rangle}.$$

这就得出

$$\int_G \langle g^{-1}w_2, w_1\rangle\langle g v_1, v_2\rangle \mathrm{d}g = \frac{1}{\dim V}\langle v_1, w_1\rangle\overline{\langle v_2, w_2\rangle},$$

也就是

$$\int_G \langle g v_1, v_2\rangle\overline{\langle w_1, g^{-1}w_2\rangle} \mathrm{d}g = \frac{1}{\dim V}\langle v_1, w_1\rangle\overline{\langle v_2, w_2\rangle}.$$

这就证明了

$$\int_G \langle g v_1, v_2\rangle\overline{\langle g w_1, w_2\rangle} \mathrm{d}g = \frac{1}{\dim V}\langle v_1, w_1\rangle\overline{\langle v_2, w_2\rangle}.$$

设 V 是 G 的不可约酉表示,设$\langle,\rangle$是 V 上的 G 不变 Hermitian 型,$v_1,\cdots,v_n$ 是 V 上的一组标准正交基,那么根据以上命题可知

$$f_{ij}(g) = \langle g v_i, v_j\rangle \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

是两两正交的函数. G 上所有平方可积函数 $L^2(G)$上的内积是这样定义的:

$$\langle f, h\rangle = \int_G f(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x .$$

事实上,下面的 Peter－Weyl 定理告诉我们,当取遍 G 的不可

约酉表示时,所有的 $f_{ij}(g)$构成 $L^2(G)$的一组标准正交基.

定理(Peer - Weyl) 设 G 为紧李群. 由 G 的不可约酉表示的矩阵系数构成的子代数 $C_0(G)$在 G 的连续函数 $C(G)$与平方可积函数 $L^2(G)$所构成的代数中都是稠密的.

证明 我们先证明如果 G 有一个忠实的酉表示,那么 Peter - Weyl 定理就成立. 为了证明这一点,我们需要 Stone - Weierstrass 定理. 事实上,Perter - Weyl 定理和紧李群上的 Stone - Weierstrass 定理是等价的.

定理(Stone - Weierstrass) 设 X 为紧致拓扑空间,设 $C(X)$为 X 上全体连续复值函数组成的线性空间,$C(X)$的模定义为极大值. $C(X)$在函数相乘即是函数值在每一点相乘的定义下构成一个代数. 设 B 是一个包含常数函数,可以区分不同点(也就是对 $x,y\in X, x\neq y$,存在 $f\in B$ 使得$f(x)\neq f(y)$),并且在复共轭下不变的子代数(也就是若 $f\in B$,则有 $\overline{f}\in B$). 那么 B 在$C(X)$中是稠密的.

Stone - Weierstrass 定理的证明可以在许多泛函分析的书中找到. 我们现在假定 G 有一个忠实表示(π, V). 那么 V 的矩阵系数是区分点的,这是因为若有 $g\neq h$,则一定存在 V 中一个向量 v,使得 $\pi(g)v\neq\pi(h)v$. 因为 V 可以分解为不可约酉表示的直和,所以 V 的矩阵系数都包含在$C_0(G)$中. 这就得出 $C_0(G)$是可以区分点的. 平凡表示是酉表示,因而 $C_0(G)$包含了常数函数. 如果 V 是酉表示,那么其对偶表示 V^* 与复共轭表示 $\overline{V}$ 同构,这就得出若有 $f\in C_0(G)$,那么必有 $\overline{f}\in C_0(G)$. 根据 Stone - Weierstrass 定理,$C_0(G)$在 $C(G)$中是稠密的. 又因为 $C(G)$在 $L^2(G)$中稠密(L^2 - 模),所以 $C_0(G)$在 $L^2(G)$也是稠密的.

综上所述,只要可以找到 G 的忠实表示,那么 Peter - Weyl

定理就一定成立．我们将在§9.3中逐一验证单的紧李群都有忠实表示，而一般紧李群是单的紧李群的直积，所以也一定有忠实表示．

推论 设 G 为紧李群．G 的不可约表示的特征生成一个在全体 G 上类函数空间中稠密的子空间．也就是说，不可约表示的特征组成类函数空间的一组标准正交基．

证明 设 f 为 G 上的一个类函数．给定一个 $\varepsilon>0$，根据 Peter－Weyl 定理，存在一个酉表示 V 的矩阵系数 φ，使得

$$|f-\varphi|<\varepsilon .$$

这样就有 $\psi(x)=\int_G\varphi(gxg^{-1})\mathrm{d}g$ 为类函数，而且

$$|f-\varphi|<\varepsilon .$$

因此，我们只需要证明 ψ 可以写成不可约表示的特征的线性组合．因为 V 可以分解为不可约酉表示的直和

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_n,$$

所以我们可以将 $\varphi(x)$ 表示成

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}(xv_i,w_i),$$

其中 v_i,w_i 是 V_i 中的向量．这就得到

$$\int_G\varphi(gxg^{-1})\mathrm{d}g=\sum_{i=1}^{n}\int_G\langle gxg^{-1}v_i,w_i\rangle\mathrm{d}g .$$

再利用本节命题的证明中得到的公式(8.5c)，我们对每一个不可约酉表示(π_i,v_i)都有

$$\int_G\pi_i(gxg^{-1})\mathrm{d}g=\frac{1}{\dim V_i}\chi_{V_i}(x)i\mathrm{d}_{V_i}.$$

这就得出

$$\int_G\langle gxg^{-1}v_i,w_i\rangle\mathrm{d}g=\frac{1}{\dim V_i}\langle v_i,w_i\rangle\chi_{V_i}(x),$$

因而就证明了推论.

§8.6 球面调和函数

作为表示论的应用我们现在将欧氏空间$\mathbb{R}^n$和单位球面S^{n-1}上的函数分解为相应的正交群$O(n)$的不可约表示的直和.

我们用P_k表示所有次数为k的$\mathbb{R}^n$上齐次复多项式组成的线性空间,记F_k为P_k中的多项式限制在S^{n-1}上所得到的函数生成的线性空间. 那么我们有下面的直和分解

$$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]=\bigoplus_{k\geqslant 0}P_k .$$

如果$x\in S^{n-1}$,那么$\|x\|^2=\sum x_i^2=1$,这就得出

$$P_k\cong F_k\supset F_{k-2}\supset F_{k-4}\supset\cdots$$

正交群$O(n)$作用在$\mathbb{R}^n$,也作用在P_k与F_k上. P_k与F_k都是$O(n)$的表示,我们可以在F_k上定义一个$O(n)$不变的Hermitian内积,设H_k为F_{k-2}在F_k中的正交补,这样就有

$$F_k=H_k\oplus F_{k-2}=H_k\oplus H_{k-2}\oplus H_{k-4}\oplus\cdots$$

H_k也是$O(n)$的表示,我们称H_k为S^{n-1}上的次数为k的球面调和函数所构成的空间.

我们现在来证明H_k是$O(n)$的不可约表示. 根据Stone-Weierstrass定理可知,$\mathbb{R}^n$上的多项式限制在S^{n-1}上是S^{n-1}上全体连续函数空间$C(S^{n-1})$中的稠密子空间. 这就得出

$$C(S^{n-1})^{G\text{有限}}=\bigcup_{k\geqslant 0}F_k=\bigoplus_{k\geqslant 0}H_k . \tag{8.6a}$$

我们将S^{n-1}看作是齐性空间$O(n)/O(n-1)$. 如果G是一

个紧李群,由 Peter-Weyl 可知 G 上的全体 G 有限函数构成的空间是 G 的不可约表示的矩阵系数的直和,这个空间作为一个 $G\times G$ 的表示可以分解为

$$\bigoplus_{V\in\hat{G}} V\otimes V^*,$$

其中 $\hat{G}$ 表示 G 的所有不可约酉等价类的集合. 因此,所有 G 有限的定义在齐性空间 G/H 的函数构成的空间可以分解为

$$\bigoplus_{V\in\hat{G}} V\otimes(V^*)^H,$$

这里的 $(V^*)^H$ 表示 V^* 在 H 作用下不变的向量. 我们现在取 $G=O(n), H=O(n-1)$,这就得出

$$C(S^{n-1})^{O(n-1)\text{有限}}=\bigoplus_{V\in\hat{O}(n)} V\otimes(V^*)^H. \tag{8.6b}$$

(8.6a)与(8.6b)中两个分解是完全相同的,当且仅当对某个 k, $H_k^{O(n-1)}$ 是一维子空间. 我们不妨假设 $O(n-1)$ 为 $O(n)$ 中保持 x_1 一轴不变的子群. P_k 中的一个齐性多项式 f 是 $O(n-1)$ 不变的当且仅当 f 是下面多项式的线性组合

$$x_1{}^k, x_1{}^{k-2}r^2, x_1{}^{k-4}r^4, \cdots$$

其中 $r^2=x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2$. 因此, $\dim P_k{}^{O(n-1)}=\left[\frac{k}{2}\right]$,这就得出

$$\dim H_k{}^{O(n-1)}=\dim P_k{}^{O(n-1)}-\dim P_{k-2}{}^{O(n-1)}=1.$$

这就证明了 H_k 是 $O(n)$ 的不可约表示.

因为 H_k 是 F_k 的子集,而 F_k 又是 P_k 限制在 S^{n-1} 所得到的,所以对于任意一个 H_k 中的函数 φ, $r^k\varphi$ 是一个次数为 k 的 $\mathbb{R}^n$ 上齐次多项式. 设 $\hat{H}_k$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上所有这样的齐次多项式组成的集合,将 $\mathbb{R}^n$ 上的函数限制在 S^{n-1} 上,就得出同构 $\hat{H}_k\cong H_k$. 这就得到

$$P_k = \hat{H}_k \oplus r^2 \hat{H}_{k-2} \oplus r^4 \hat{H}_{k-4} \oplus \cdots$$

因此$\mathbb{R}^n$上的任意一个多项式f都可以写成

$$f(r\theta) = \sum_k r^k f_k(r^2)\varphi_k(\theta),$$

其中 $\theta \in S^{n-1}$, $\varphi_k \in H_k$,而 f_k 是关于 r^2 的一个一元多项式,这就得到了下面的分解

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] = \bigoplus_{k \geqslant 0} E_k \otimes H_k, \tag{8.6c}$$

其中 E_k 是由径向函数 $r^k f_k(r^2)$生成的空间.

设 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$ 为 Laplace 算子,以下定义的三个算子都与 $O(n)$的作用交换

$$e = \frac{1}{2}\Delta, h = r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{2}, f = \frac{1}{2}r^2 .$$

而且这三个算子都保持空间 E_k 不变. 不难验证,这三个算子还满足

$$[h, e] = -2e, [h, f] = 2f, [e, f] = h .$$

这就得出$\{e, h, f\}$生成一个实李代数 $SL(2, \mathbb{R})$,而 E_k 则是 $SL(2, \mathbb{R})$的一个表示. 事实上 E_k 是由 r^k 生成的最低权为 $k + \frac{n}{2}$的无限表示. (8.6c)的分解是$SL(2, \mathbb{R})$与 $O(n)$的对偶对的对应. 我们将会在第十二章中见到更多的对偶对的对应.

§8.7 Borel－Weyl 定理

我们知道紧李群的不可约表示可以用它们的最高权作完全分类,我们还可以用 Weyl 特征公式写出每一个不可约表示的

特征．但是，这样都还没有告诉我们如何具体地构造一个紧李群的不可约表示．Borel - Weyl 定理提供了构造紧李群不可约表示的具体模型．我们将不涉入最一般的情况，只假定紧李群为 $SU(n)$．

如果 V 是 $SU(n)$ 的一个不可约酉表示，我们用 Weyl 酉转换可以将 V 扩展到 $G = SL(n,\mathbb{C})$ 上的一个全纯表示或 $SL(n,\mathbb{C})$ 上的一个复线性表示．然后我们将 G 的作用限制在对角子群 T 上，这里

$$T=\left\{u=\begin{pmatrix}u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_r\end{pmatrix} \mid u_1\cdots u_n=1\right\},$$

然后将 V 作为 T 的表示进行分解．因为 T 是 G 的一个交换子群，V 限制在 T 上是 T 的一个酉表示，所以存在 V 的一组基使得每一个基向量都是 T 的特征向量，也就是存在 $\lambda\in\mathbb{Z}^n$ 使得

$$u\cdot v=u_1{}^{\lambda_1}\cdots u_n{}^{\lambda_n}v$$

对所有的 $u\in T$ 都成立．令 $u_1=\cdots=u_n$ 为某个 n 重单位根，这就得到 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ 必为 n 的倍数．设 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=mn$，我们可以用 λ_i-m 取代 λ_i 得出新的一系列 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n$ 并满足

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0 .$$

这些特征向量 v 称为是权向量，数列 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 称为权向量 v 的权．如果 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，那么我们称数列 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 为支配权．

设 B 为 G 中全体上三角矩阵组成的子群，B 的李代数是由迹为零的对角矩阵与 $E_{ij}(i<j)$ 线性组合生成．设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n$．令 $\Gamma(\lambda)$ 为定义在 G 上的全纯的并满足下列条件的函数所构成的线性空间

$$F(xb)=b_1^{-\lambda_1}\cdots b_n^{-\lambda_n}F(x), x\in G,$$

$$b=\begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}\in B.$$

定理(Borel - Weyl) 设 $G=SL(n,\mathbb{C})$,那么就有

(i)如果 $\lambda\in\mathbb{Z}^n$是G 的一个不可约酉表示V 的最高权,也就是一个整支配权,那么由下列表达式定义的 G 等变的映射 φ: $V^*\to\Gamma(\lambda)$

$$\varphi:\alpha\mapsto F_\alpha,\text{其中 } F_\alpha(g)=\langle\alpha,gv\rangle$$

是一个同构. 这就得出 $V\cong\Gamma(\lambda)^*$.

证明 显然 φ 是非零的G 等变映射,而 V^* 又是 G 的一个不可约表示,所以 φ 是一个单一的映射. 要证明 φ 同时又是一个满射,只要证明 $\Gamma(\lambda)$是 G 的不可约表示. 假设 $\Gamma(\lambda)$不是不可约的,那么它一定可以分解为至少是两个表示的直和,而这每一个子表示都至少包含一个最低权向量,也就是在严格意义下三角矩阵所构成的子群 $\tilde{N}$ 作用下不变的向量. 因此,我们只需要证明 $\dim\Gamma(\lambda)^{\tilde{N}}\leqslant1$. 设 $F\in\Gamma(\lambda)$是一个在 $\tilde{N}$ 作用下不变的函数,那么 $F(\tilde{n}b)=\lambda(b)F(e)$. 由于任意一个矩阵都可以写成一个严格意义下三角矩阵与上三角矩阵的乘积,所以这样的函数 F 由它在单位 e 上的取值完全确定,也就是 $\dim\Gamma(\lambda)^{\tilde{N}}\leqslant1$.

第九章　表示的 Weyl 构造

§9.1　典型群表示的 Weyl 构造

设 G 为紧李群,并设 G 的李代数的复化是一个单的复李代数 $\mathfrak{g}$. 设 $V(\lambda_i)(i=1,\cdots,l)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的基本表示,那么 G 的或者是 $\mathfrak{g}$ 的最高权为 $\lambda=k_1\lambda_1+\cdots+k_l\lambda_l$ 的不可约表示是下面张量积表示的子表示

$$\underbrace{V(\lambda_1)\otimes\cdots\otimes V(\lambda_1)}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\underbrace{V(\lambda_l)\otimes\cdots\otimes V(\lambda_l)}_{k_l}.$$

这里的 $k_1,\cdots,k_l$ 都是非负整数. 事实上,对于绝大多数的单的紧李群 G 来说,它的所有的不可约表示可以从某一个不可约表示 V 的张量幂

$$V^{\otimes k}=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{k}$$

的子表示中实现. 除了 $G=\mathrm{Spin}(4n)$之外,这样的不可约表示 V 对所有单的紧李群都存在,我们将在这一章中证明这一点. 如果不可约表示 V 的最高权是 $\lambda=k_1\lambda_1+\cdots+k_l\lambda_l$,我们可以确定是否 G 的所有不可约表示都在 V 的张量幂之中出现,我们将在§9.3中详细讨论如何确定这一点. 一个很自然的问题

是，我们是否可以取 G 的维数最小的非平凡不可约表示作为满足上述条件的不可约表示 V . 对于所有单连通的紧李群，除了 Spin(n)之外，答案都是肯定的.

如果 G 是典型群，也就说 G 是酉群 $U(n)$，正交群 $O(n)$ 或是辛群 $Sp(2n)$，H. Weyl 证明了 G 的所有不可约表示都出现在其自然表示 V 的张量幂之中，他并且得出分解张量幂 $V^{\otimes k}$ 的方法. 我们现在先来描述 Weyl 的构造方法.

9.1.1 $U(n)$表示的 Weyl 构造 设 V 为 n 维复线性空间，$V^{\otimes k}=V\otimes\cdots\otimes V$ 是 V 的 k 一次张量幂. $G=GL(V)\cong GL(n,\mathbb{C})$或者 $G=U(n)$在 $V^{\otimes k}$的作用是

$$g.(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)=g\cdot v_1\otimes\cdots\otimes g\cdot v_k\ .$$

我们定义对称群 Sk 在 $V^{\otimes k}$上的作用为

$$\sigma\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)=v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(k)}.$$

G 与 S_k 在 $V^{\otimes k}$ 上的作用显然是交换的. 由 G 和 S_k 在 End($V^{\otimes k}$)中的像生成的两个代数互为换位子. 我们先证明下面的一个较弱形式的 Schur 对偶定理.

命题 在 $U(n)\times S_k$ 作用下，我们有下面的直和分解

$$V^{\otimes k}=\bigoplus_{\sigma}\pi_\sigma\otimes\sigma,$$

这里的求和是让 σ 遍历 S_k 所有的不可约表示，而

$$\pi_\sigma=\mathrm{Hom}_{S_k}(\sigma,V^{\otimes k})$$

是 $U(n)$的不可约表示或者为 0 . 而且 $U(n)$的每一个不可约表示都在某个张量幂 $V^{\otimes k}$中出现. 只要 $k\leqslant\dim V$，那么所有 S_k 的不可约表示也在 $V^{\otimes k}$中出现.

证明 我们先证明每一个 $G=U(n)$的不可约表示都会在某一个张量幂 $V^{\otimes k}$中出现. 所有 $V^{\otimes k}(k=0,1,2,\cdots)$中的表示的矩阵系数生成一个代数 S，这是 G 上全体连续函数所生成

的代数$C(G)$的一个子代数．如果G的某一个不可约表示不在任意次数的张量幂$V^{\otimes k}$中出现，那么这个不可约表示的矩阵系数是与S上的函数正交的(参阅§8.5中命题)，也就是说S是不等$C(G)$的真子代数．因为$\mathbb{C}\cong\wedge^n V$与$\widetilde{V}\cong V^*\cong\wedge^{n-1}V$都在$V$的某个张量幂出现，所以$S$包含常数函数而且对于复共轭是封闭的．又因为$U(n)$在$V$的作用是忠实表示，所以$S$是区分点的．根据Stone－Weierstrass定理，$S=C(G)$．这与上面G的某一不可约表示不在任何次数的张量幂中出现相矛盾．因此，这就证明了$U(n)$的每个不可约表示都在某个张量幂$V^{\otimes k}$中出现．

我们再来证明如果$k\leqslant n$，那么S_k的所有不可约表示也都在$U^{\otimes k}$中出现．这是因为S_k的不可约表示都在群代数$\mathbb{C}[S_k]$中出现，若$v_1,\cdots,v_n$是V的一组基，那么$v_1\otimes\cdots\otimes v_k$在$S_k$的作用之下生成的轨道的线性组合是与$\mathbb{C}[S_k]$同构的．

最后我们来证明$V^{\otimes k}$在$G\times S_k$作用下的分解．$V^{\otimes k}$可以作为S_k—模分解为

$$V^{\otimes k}=\bigotimes_{\sigma}V_\sigma\otimes\sigma,$$

这里的求和是让σ遍历S_k所有的不可约表示，而

$$V_\sigma=\mathrm{Hom}_{S_k}(\sigma,V^{\otimes k})$$

是一个G的表示．因为G的表示是完全可约的，若要证明非零的V_σ是不可约表示，只要证明V_σ是不可分解，也就是不能写成二个非零表示的直和．根据Schur引理，我们得出

$$\mathrm{End}_{S_k}(V^{\otimes k})=\bigoplus_{\sigma}\mathrm{End}(V_\sigma),$$

所以进一步得到

$$\mathrm{End}_{G\times S_k}(V^{\otimes k})=\bigoplus_{\sigma}\mathrm{End}_G(V_\sigma).$$

因此，我们只需要证明$\mathrm{End}_{G\times S_k}(V^{\otimes k})$包含在$\mathrm{End}_{S_k}(V^{\otimes k})$的

中心里面，这只要证明 G 在 $\mathrm{End}_{S_k}(V^{\otimes k})$中的像，线性生成整个线性空间 $\mathrm{End}_{S_k}(V^{\otimes k})$．因为 $\mathrm{End}_{S_k}(V^{\otimes k})$是 $\mathrm{End}(V^{\otimes k})\cong \mathrm{End}(V)^{\otimes k}$中在 S_k 作用下不变的元素，而且 $G=U(n)$作用在 $\mathrm{End}(V)$上有一个开的稠密子集，所以$(\mathrm{End}(V)^{\otimes k})^{S_k}$上的一个线性泛函是一个定义在线性空间 $\mathrm{End}(V)$上的 k 次齐次多项式，而这样的一个多项式一定是零，如果它在一个开的稠密子集上为零．这就完成了命题的证明．

上述命题并没有告诉我们在 $k>\dim V$ 的情况下，哪些 S_k 的表示出现在 $V^{\otimes k}$的分解之中．我们现在再给出一个更精细形式的 Schur 对偶定理．我们在§3.3 中曾经提到，对于 k 的任何一个划分 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)(\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant 1)$，有一个相应的 Young 图，这个 Young 图每 i 行有 λ_i 个方格，而每一行最左边的方格排成竖直的一行．如果在一个 Young 图中每个方格中填入 1 到 k 这几个数字，使得自上而下与自左而右都是递减，那么这样得到的图表称为 Young 表．

给定一个对应于划分 λ 的 Young 表，我们在§3.3 中定义了 Young 对称算子 C_λ，这是$\mathbb{C}[S_k]$中的元素，可以证明 c_λ 乘以某个常数是幂等的，而且 C_λ 右乘在$\mathbb{C}[S_k]$得到的像是一个 S_k 的不可约表示，这个表示记为 V_λ．所有的 S_k 的不可约表示都可以这样得到(参阅[FH]中定理 4.3)．

设 V 是一个有限维复线性空间，我们考虑 $GL(V)$和 S_k 在 $V^{\otimes k}$上的作用，$GL(V)$的作用是每个线性变换同时作用在张量幂的每个因子上，而 S_k 的作用是对这个因子作置换．

我们记 Young 对称算子作用在 $V^{\otimes k}$的像为$S_\lambda(V)$，也就是

$$S_\lambda(V)=\mathrm{Im}(c_\lambda : V^{\otimes k}\to V^{\otimes k}).$$

这样定义的算子 $V\to S_\lambda(V)$称为 Schur 算子．

定理(Schur 对偶定理)　作为 $GL(V)\times S_k$ 的表示，V 的张量幂 $V^{\otimes k}$ 同构于下面不可约表示的直和

$$V^{\otimes k}\cong\bigoplus\mathbb{S}_\lambda(V)\otimes V_\lambda,$$

这里的求和是让 λ 遍历所有 k 的不超过 $\dim V$ 个部分的划分. 读者可以在[FH]的 6.2 中找到这个定理的证明.

9.1.2　$O(n)$ 与 $Sp(2m)$ 表示的 Weyl 构造　在这一小节中我们令 $G=O(n)$ 或 $Sp(2m)$. 如果 $G=Sp(2m)$，我们记 $2m=n$. 设 V 是 G 的自然表示，也就是 G 的维数为 n 的表示 . 设 $\langle,\rangle$ 是 V 上的一个 G 不变的 Hermitian 形式，若 $G=O(n)$ 这个形式是对称二次型，若 $G=Sp(2m)$ 这个形式是反对称的二次型. 因为 V 是 G 的忠实表示，所以根据在 9.1.1 命题中证明任意一个 $U(n)$ 的表示都在其自然表示的某个张量幂中出现的同样推理，我们得出 G 的任意一个不可约表示也出现在某个张量幂 $V^{\otimes k}$ 之中.

设 $I=\{i,j\}$ 是集合 $\{1,\cdots,k\}$ 中含有 2 个元素的子集合(我们设 $k\geqslant 2$)，现在定义一个收缩映射:

$$\Phi_I: V^{\otimes k}\to V^{\otimes(k-2)},$$

$$v_1\otimes\cdots\otimes v_k\mapsto(v_i,v_j)v_1\otimes\cdots\otimes\hat{v}_i\otimes\cdots\otimes\hat{v}_j\otimes\cdots\otimes v_k\ .$$

令 $V^{[k]}$ 为所有可能的 Φ_I 的核的交集. 因为某一个收缩映射的核在张量因子置换之下映到另一个收缩的核，所以 $V^{[k]}$ 为在 S_k 作用下的 $V^{\otimes k}$ 的一个子表示. 设 λ 为 k 的一个划分，我们定义

$$\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)=V^{[k]}\cap\mathbb{S}_\lambda(V)$$

为 $V^{[k]}$ 与 Schur 算子像的交集.

定理　$\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$ 是 G 的不可约表示或为零空间. $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$ 是非零的当且仅当下列条件成立:

(i)若 $G=O(n)$，$\lambda_1+\lambda_2\leqslant n$（也就是对应于 λ 的 Young 图的前二行之和小于 n）；

(ii)若 $G=Sp(2m)$，$\lambda_{m+1}=0$（也就是对应 λ 的 Young 图至多有 m 行）.

这个定理的证明可以在[FH]的§17.3与§19.5中找到.

注 可以证明我们有下面的分解

$$V^{[k]}\cong\bigoplus\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)\otimes V_\lambda,$$

这里的求和是让 λ 遍历 k 的划分. 我们将在下一节中证明当 G 为例外群 G_2 时，可以得到类似的分解定理.

§9.2 非典型群表示的 Weyl 构造

本节中我们把表示的 Weyl 构造推广到非典型群上. 这一节主要取材于[HZ]，这是作者与朱程波合作的文章.

9.2.1 Weyl 构造的历史 H.Weyl 在他著名的《典型群》([We])一书中详细研究了典型群的两个基本问题：第一是典型群自然表示的多元多项式的不变量，第二是典型群自然表示张量幂的分解. 我们简称第一类问题为不变量理论，第二类问题为张量幂分解. 除了在典型群上研究以上二类问题外，我们自然要问对于五个非典型群 G_2,F_4,E_6,E_7 和 E_8 又如何呢？G.Schwarz 在[S]研究了 G_2 的不变量理论，我们将运用 G_2 的不变量理论得出 G_2 最小维数的非平凡表示张量幂的分解，并将 Weyl 构造推广到 G_2.

非典型群 G_2 是 Cayley 代数$\mathbb{O}$的自同构群. G_2 的最小维数的非平凡表示 V 是一个7维表示，这个表示 V 可以通过 G_2

在所有迹为零的 Cayley 数上的作用来实现. 利用 Schwarz 得出了 G_2 的不变量理论,我们可以定义一族收缩映射和扩张映射,这些映射都是对应于 G_2 不变量的 V 的张量幂之间的同态. 我们将证明与 G_2 在 $V^{\otimes n}$ 上作用互为交换子的是由收缩映射、扩张映射和对称群 S_n 生成的代数. 如果记 $V^{[n]}$ 为所有真实的收缩映射之核的交集,那么与 G_2 的作用互为交换子的代数则是由 S_n 生成的群代数. 记 $\mathbb{S}_\lambda$ 为对应于划分 λ 的 Schur 算子,那么 G_2 的任何一个不可约表示都同构于某个 $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)=\mathbb{S}_{[\lambda]}\cap V^{[n]}$. 我们将证明 $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$ 是非零的当且仅当 n 的划分 λ 至多有两个部分,而且 $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$ 在 $V^{[n]}$ 中出现的重数等于 S_n 的表示 V_λ 的维数. 事实上,我们将证明作为 $G_2\times S_n$ 的表示,$V^{[n]}$ 可以分解为

$$V^{[n]}\cong\bigoplus\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)\otimes V_\lambda,$$

其中求和是让 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)(\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant 0)$ 遍历 n 的不超过两个部分的划分.

我们研究 G_2 的方法本意与 Weyl 对于典型群的研究方法([We])相似. Weyl 的方法在[FH]一书中有比[We]更加简明的叙述. 分解 G_2 表示 V 的张量幂实际上用到的是不变量的生成元. 如果能够找出其他非典型群最小维数的不变量的生成元,那么我们用同样的方法得到它的张量幂的分解. 我们在这里顺便指出,虽然 Spin(7)的半旋表示与 G_2 的 7 维表示紧密相关,但是一般来说研究 Spin(n)的半旋表示的方法与 G_2 的方法完全不同. 对于 Spin(n)我们应该先用 Howe 的对偶对理论([H]§4.3.5)分解半旋表示的偶数次张量幂,再利用已知的偶次张量幂的结果分解奇次的张量幂.

9.2.2 G_2 的不变量理论 我们先来叙述将要用到的不变量理论,这里提到的结果是由 G.Schwarz 得到的.

Cayley 代数是惟一的一个非交换、非结合的定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上的 8 维可除代数．它可以由下面的方法来实现．设 $A_{\mathbb{R}}$ 为所有成对的四元数组成的集合，$A_{\mathbb{R}}$ 上的加法定义为每个向量相加，$A_{\mathbb{R}}$ 上的乘法定义为

$$(a,b)(c,d)=(ac-\overline{d}b,da+b\overline{c}),$$

其中 $a\mapsto\overline{a}$ 是四元数的共轭变换．那么 $A_{\mathbb{R}}$ 是一个定义在实数域 $\mathbb{R}$ 上的非交换、非结合可除代数．Cayley 代数 $\mathbb{C}$ 就是 $A_{\mathbb{R}}$ 的复化．如果 $x=(a,b)\in A_{\mathbb{R}}$，我们定义 $\overline{x}=(\overline{a},-b)$，定义 x 的迹 $tr(x)=\mathrm{Re}a$，也就是 a 的实部．

Cayley 代数 $\mathbb{C}$ 的自同构群中包含单位的连通子群就是复的非典型群 G_2．令 V 为 $\mathbb{C}$ 中迹为零的元素，这是 G_2 的一个不可约的忠实表示．

我们现在来刻画不变量．设 m 为正整数，记 $mV=V^{\oplus m}$ 为 m 个线性空间 V 的直和，设 $(x_1,\cdots,x_m)$ 为 mV 中任意元素．我们定义以下三族不变量，也就是 $\mathbb{C}[mV]^{G_2}$ 中三类多项式函数：

$$\alpha_{ij}=-\mathrm{trace}(x_ix_j),1\leqslant i,j\leqslant m;$$
$$\beta_{ijk}=-\mathrm{trace}(x_i(x_jx_k)),1\leqslant i,j,k\leqslant m;$$
$$\gamma_{ijkl}=\mathrm{skew\ trace}(x_i(x_j(x_kx_l))),1\leqslant i,j,k,l\leqslant m. \tag{9.2.2a}$$

这里定义的最后一个函数是指根据指标置换的奇偶性而乘以 ± 符号求和．我们可以将这些不变量等同于 $(V^*)^{\otimes d}(d=2,3,4)$ 中的元素，这里的 V^* 是指 V 的对偶空间．

下面的定理是由 G.Schwarz 证明的[S]．

定理　G_2 的不变量 $\mathbb{C}[mV]^{G_2}$ 是由 α_{ij}，β_{ijk} 和 γ_{ijkl} 生成的．

9.2.3　收缩、扩张和交换子代数　　我们仍然用 V 来代

表G_2的7维不可约表示．我们将用9.2.2中的三类G_2不变量来定义收缩算子和扩张算子．设$\phi\in(V^*)^{\otimes d}$是一个定义在V的多重线性函数，我们设ϕ或者是对称的或者是反对称的．我们还可以利用V上的一个非退化二次型得到一个同构$V^*\cong V$，在这个同构之下，我们可以将V与V^*等同于同一个线性空间．设k为整数且有$0\leqslant k\leqslant d$，我们定义下列算子$CE_k(\phi)$：

$$CE_k(\phi): V^{\otimes(d-k)}\to V^{\otimes k},$$

$$v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_{d-k}\mapsto \phi((v_1, v_2, \cdots, v_{d-k}, \underbrace{*,\cdots,*}_{k}))\in(V^*)^{\otimes k}\cong V^{\otimes k}.$$

我们称算子$CE_k(\phi)$是在$\{1,2,\cdots,d-k\}$上收缩然后在$\{d-k+1,\cdots,d\}$上嵌入．

如果$0\leqslant k\leqslant\frac{d}{2}$，我们称$CE_k(\phi)$为收缩算子；如果$\left[\frac{d}{2}\right]<k\leqslant d$，我们称$CE_k(\phi)$为扩张．我们称$CE_k(\phi)$为真实的收缩算子，如果$k<\frac{d}{2}$．设$I=\{i_1<i_2<\cdots<i_{d-k}\}$和$J=\{j_1<j_2<\cdots<j_k\}$为$\{1,\cdots,n\}$的两个子集，算子$CE_k(\phi)$定义了在$I$收缩然后再在$J$扩张的算子：

$$CE_k(\phi)_{I,J}: V^{\otimes n}\to V^{\otimes(n-d+2k)}.$$

G_2的三类不变量为

$$\alpha\in\mathrm{Sym}^2(V^*), \beta\in\wedge^3(V^*), \gamma\in\wedge^4(V^*).$$

这样我们就得到第一类收缩算子

$$A_I=CE_0(\alpha)_{I,\emptyset}: V^{\otimes n}\to V^{\otimes(n-2)}, |I|=2,$$

$$B_J=CE_0(\beta)_{J,\emptyset}: V^{\otimes n}\to V^{\otimes(n-3)}, |J|=3,$$

$$C_K=CE_0(\gamma)_{K,\emptyset}: V^{\otimes n}\to V^{\otimes(n-4)}, |K|=4,$$

和第二类收缩算子

$$B'_J=CE_1(\beta)_J: V^{\otimes n}\to V^{\otimes(n-1)}, \quad J=\{J_1, J_2\},$$

$|J_1|=2,|J_2|=1$,

$$C'_K = CE_1(\gamma)_K: V^{\otimes n} \to V^{\otimes(n-2)}, \quad K=\{K_1,K_2\},$$

$|K_1|=3,|K_2|=1$,

以及第三类收缩算子

$$C''_K = CE_2(\gamma)_K: V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}, \quad K=\{K_1,K_2\},$$

$|K_1|=2,|K_2|=2$.

我们还可以形式地定义下列收缩算子

$$A'_I = CE_1(\alpha)_I: V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}, \quad I=\{I_1,I_2\}, |I_1| =$$

$2, |I_2|=2$.

但是这个算子实际是一个恒等算子,我们不把它放在收缩算子之列.

我们还能得到第一类扩张算子

$$\Phi_I = CE_2(\alpha)_{\emptyset,I}: V^{\otimes(n-2)} \to V^{\otimes n}, |I|=2,$$

$$\Psi_J = CE_3(\beta)_{\emptyset,J}: V^{\otimes(n-3)} \to V^{\otimes n}, |J|=3,$$

$$\Theta_K = CE_4(\gamma)_{\emptyset,K}: V^{\otimes(n-4)} \to V^{\otimes n}, |K|=4,$$

和第二类扩张算子

$$\Psi'_J = CE_2(\beta)_J: V^{\otimes(n-1)} \to V^{\otimes n}, J=\{J_1,J_2\},$$

$|J_1|=1,|J_2|=2$,

$$\Theta'_K = CE_3(\gamma)_K: V^{\otimes(n-2)} \to V^{\otimes n}, K=\{K_1,K_2\},$$

$|K_1|=1,|K_2|=3$.

我们在下面图表中列出所有定义的收缩与扩张算子:

	收缩	扩张
	$A: V^{\otimes 2} \to \mathbb{C}$	$\Phi: \mathbb{C} \to V^{\otimes 2}$
第一类	$B: V^{\otimes 3} \to \mathbb{C}$	$\Psi: \mathbb{C} \to V^{\otimes 3}$
	$C: V^{\otimes 4} \to \mathbb{C}$	$\Theta: \mathbb{C} \to V^{\otimes 4}$

第二类 $B': V^{\otimes 2} \to V \qquad \Psi': V \to V^{\otimes 2}$

$C': V^{\otimes 3} \to V \qquad \Theta': V \to V^{\otimes 3}$

第三类 $C'': V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$

请注意我们定义的第一类与第二类扩张算子都是单一的映射，而第一类与第二类收缩算子都是满射．第三类收缩算子既不是单的又不是满的，我们将在 9.2.4 中算出它的像与核．

现在定义 G_2 的交换子代数为

$$\beta = \mathrm{Hom}_{G_2}(V^{\otimes n}, V^{\otimes n}) = \{\phi: V^{\otimes n} \to V^{\otimes n} \mid \phi(g \cdot v) = g \cdot \phi(v), \forall\, v \in V^{\otimes n}, g \in G_2\},$$

其中 g 在 $V^{\otimes n}$ 上的作用是对角作用在每个因子上．

定理 交换子代数 β 是由 S_n 中的置换以及收缩算子和扩张算子生成．

证明 这里的证明与[FH]附录 2 中定理 17、19 的证明十分相似．我们用 Sym^d 表示定义在 V 上的次数为 d 的齐次多项式的集合，也就是 $\mathrm{Sym}^d = \mathrm{Sym}^d(V^*)$．设 $\mathbb{d} = (d_1, \cdots, d_m)$，其中 $d_1, \cdots, d_m$ 为非负整数，我们用

$$\mathrm{Sym}^{\mathbb{d}} = \mathrm{Sym}^{d_1}(V^*) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{d_m}(V^*)$$

表示定义在 $V^{\oplus m} = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{m}$ 上的在第 i 个分量上次数为 d_i 的齐次多项式的集合．我们在这里指出，

$$\mathrm{Sym}^k(V^{\oplus m})^* = \bigoplus_{\mathbb{d}} \mathrm{Sym}^{\mathbb{d}},$$

其中求和是让 $\mathbb{d} = (d_1, \cdots, d_m)$ 遍历所有满足 $d_1 + \cdots + d_m = k$ 的非负整数．为了证明定理，我们需要了解 $\mathrm{Sym}^{\mathbb{d}}$ 当 $\mathbb{d} = (1, \cdots, 1)$ 时的 G_2 不变量，也就是 $(V^*)^{\otimes m}$ 中的 G_2 不变量．运用 Schwarz 定理(9.2.2)，我们可以看出这些不变量是关于 $\alpha(x^{(i)}, x^{(j)})$, $\beta(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)})$ 和 $\gamma(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)})$ 的多项式，

也就是下列乘积的线性组合：

$$\alpha(x^{\sigma(1)},x^{\sigma(2)})\cdots\beta(x^{\sigma(k+1)},x^{\sigma(k+2)},x^{\sigma(k+3)})\cdots$$
$$\gamma(x^{\sigma(l+1)},x^{\sigma(l+2)},x^{\sigma(l+3)},x^{\sigma(l+4)})\cdots,$$

其中 σ 是关于$(1,\cdots,m)$的置换，每个 $x^{(i)}$都是 V 中元素．显然上述乘积中 α,β 和 γ 出现的次数应该满足下列条件:2 倍 x 出现的次数,3 倍 β 出现的次数与 4 倍 γ 出现的次数的总和为 m ．

我们需要进一步了解上述 G_2 的不变量在下面的自然同构之下所对应的元素，这个同构是

$$(V^*)^{\otimes 2n}\cong(V^*)^{\otimes n}\otimes V^{\otimes n}\cong\mathrm{Hom}(V^{\otimes n},V^{\otimes n})=\mathrm{End}(V^{\otimes n}).\tag{9.2.3a}$$

我们要说明在$(V^*)^{\otimes 2n}$中的一个G_2 不变量在$(9.2.3a)$同构之下对应于下列映射的复合：一个 S_n 中的置换，一些收缩算子，一些扩张算子再加上另一个 S_n 中的置换．为了简单明了地说明这一点，我们利用下面的图表，假设 $n=7$,而且在对前面 7 个位置作恰当置换 σ 和对后面 7 个位置作恰当置换 τ 之后，我们所研究的不变量是 $\beta_{1,8,9}\cdot\gamma_{2,3,4,10}\cdot\beta_{5,11,12,}\cdot\alpha_{6,7}\cdot\alpha_{13,14}$. 在图表中它可以表示成：

```
∘1     ∘2 — ∘3 — ∘4     ∘5     ∘6 — ∘7
 |            |           |
∘8 — ∘9     ∘10     ∘11 — ∘12     ∘13 — ∘14,
```

其中那些由边相连的位置对应着不变量 α,β 或γ ．那么相应的同态是 $\tau\circ\Psi'_{\{1,8<9\}}\circ\Psi'_{\{5,11<12\}}\circ\Phi_{\{13<14\}}\circ A_{\{6<7\}}\circ C'_{\{2<3<4,10\}}\circ\sigma$ ．这就证明了定理．

注　从上面的证明可以看出，交换子代数 β 中的任意一个元素是由下面的映射复合而成：第一是一个置换，第二是某些收缩算子的复合，第三是某些扩张算子的复合，最后是另一个置换．

9.2.4 张量幂的分解与 Weyl 构造 设$(,)$为 V 上的标准 Hermitian 形式，这个形式可以延拓到 $V^{\otimes n}$ 上．请注意这个形式并不是 G_2 不变的．定义这个 Hermitian 形式的目的在于在分解中可以用正交补．

引理 1 在9.2.3中定义的收缩算子中，我们可以得到下列关系式：

(i) $\mathrm{Ker}B'_J \subseteq \mathrm{Ker}B_J$ ．

(ii) $\mathrm{Ker}C''_K \subseteq \mathrm{Ker}C'_K \subseteq \mathrm{Ker}C$ ．

(iii) $\mathrm{Ker}B'|_{V^{\otimes 2}} = \mathrm{Ker}C''|_{V^{\otimes 2}} \cong \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathfrak{g}$ ．这里的 $\mathfrak{g}$ 是指伴随表示．

注 因为 $B': V^{\otimes 2} \to V$ 与 $B: V^{\otimes 3} \to \mathbb{C}$ 定义在不同张量幂上，所以引理上提到 $\mathrm{Ker}B'_J \subseteq \mathrm{Ker}B_J$ 应该理解为把 B' 当作 $V^{\otimes 2} \otimes V \to V \otimes V$ 的映射，其中在第二个张量因子 V 的映射为恒等映射．

证明 在(i)和(ii)给出的关系式显然可以由定义直接得出．我们只需要证明在(i)中 $\mathrm{Ker}B'|_{V^{\otimes 2}} \cong \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathfrak{g}$ 和在(iii)中的关系式．因为 β 是 $\wedge^3 V$ 中的元素，所以 $\mathrm{Sym}^2 V$ 包含在 B' 的核之中．我们知道 $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \wedge^2 V$，而 $\wedge^2 V \cong \mathfrak{g} \oplus V$；而且 $B': V \otimes V \to V$ 是 G_2 等变的非零映射，这是因为 β 是 G_2 不变量．因此，$\mathrm{Ker}B' = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathfrak{g}$ ．又因为 γ 是 $\wedge^4 V$ 中元素，所以 $\mathrm{Sym}^2 V$ 包含在 $\mathrm{Ker}C''$ 之中．

剩下来要证明的是 $\mathrm{Ker}C'' = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathfrak{g}$ ．我们将 G_2 在 V 上的作用限制在子群 $SU(3)$ 上，由此得到下列分解

$$V = W \oplus W^* \oplus \mathbb{C},$$

这里的 w 是 $SU(3)$ 的自然表示，W^* 是 W 的对偶表示，$\mathbb{C}$ 是 $SU(3)$ 的平凡表示．现在固定 W 的一组基 e_1, e_2, e_3 和 $\mathbb{C}$ 的一

个基向量u,我们用e_1^*, e_2^*, e_3^*表示在W^*中的对偶基. 那么G_2不变量β可以写成(参阅[FH]第359页)

$$\sum_{i=1}^{3} e_i \wedge u \wedge e_i{}^* + 2(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1{}^* \wedge e_2{}^* \wedge e_3{}^*).$$

设U为任意的n维线性空间,并设U上定义了一个非退化的二次型,那么就有一个从外代数$\wedge(U)$到自身的映射$*$: $\wedge(U) \to \wedge(U)$(称为星映射)满足下列关系式:

$*: \wedge^k(U) \to \wedge^{n-k}(U)$, and $* * = (-1)^{k(n-k)}$是$\wedge^k(U)$上的数乘映射.

因为$\beta \in \wedge^3 V$,所以$*\beta \in \wedge^4 V$. 又因为由α定义的在V上的二次型是G_2不变的,所以G_2的作用与星映射是交换的. 因此,$*\beta$也是G_2不变量,我们得到$\gamma = c(*\beta)$,其中c是一个常数. 根据[FH]359页β可以写成

$$\sum_{i=1}^{3} e_i \wedge u \wedge e_i^* + 2(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1{}^* \wedge e_2{}^* \wedge e_3{}^*).$$

因此,γ是一个常数乘以

$$\sum_{i \neq j} e_i \wedge e_i{}^* \wedge e_j \wedge e_j{}^* + 2(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge u + e_1{}^* \wedge e_2{}^* \wedge e_3{}^* \wedge u)$$

作为$SU(3)$的模,$\wedge^2 V$可以分解为

$$\wedge^2 W \oplus \wedge^2 W^* \oplus W \wedge W^* \oplus W \wedge \mathbb{C}u \oplus W^* \wedge \mathbb{C}u,$$

其中$\wedge^2 W \cong W^*$, $\wedge^2 W^* \cong W$,而且$W \wedge W^*$可以再进一步分解为$SU(3)$的复化伴随表示与平凡表示的直和. 由此得出,γ是包含在由$\wedge^2 V$中的子模V作外张量生成的在$\wedge^4 V$中的子空间中. 所以$\mathfrak{g}$包含在$\mathrm{Ker}C''$之中.

我们定义$V^{[n]}$为所有三类收缩算子的核的交集,这些算子是从$V^{\otimes n}$到$V^{\otimes(n-d)}$的映射,其中$d = 1, 2, 3, 4$.

由上面的引理1可知,$\mathrm{Ker}B \supset \mathrm{Ker}B'$, $\mathrm{Ker}C \supset \mathrm{Ker}C'$,而且

$\mathrm{Ker}C''=\mathrm{Ker}B'$,所以 $V^{[n]}$实际上是由 A,B'和C'生成的收缩算子的核的交集.我们定义

$$V^{[0]}=\mathbb{C}\,,V^{[1]}=V,V^{[2]}=\mathrm{Ker}A\cap\mathrm{Ker}B'.$$

当 $n\geqslant 3$ 时,$V^{[n]}$是 $\mathrm{Ker}A$,$\mathrm{Ker}B'$与 $\mathrm{Ker}C'$的交集,其中 A 和B'可以是在 $V^{\otimes 3}$任意二个张量因子上的收缩映射.

显然地,G_2 与 S_n 在 $V^{[n]}$上的作用将 $V^{[n]}$映射到自身.

引理 2 当 $n\geqslant 4$ 时,张量幂 $V^{\otimes n}$可以分解为

$$V^{\otimes n}=V^{[n]}\oplus\{\sum[(\Phi_I(V^{\otimes(n-2)})+\Psi'_J(V^{\otimes(n-1)})$$
$$+\Theta'_K(V^{\otimes(n-3)})]\},$$

这里的求和 $\sum$ 是让 $I=\{i<j\}$,$J=\{i,j<k\}$和 $K=\{i,j<k<l\}$遍历所有的可能,i,j,k,l 都是从 1 到 n 之间的正整数.

证明 设 $\alpha\in\mathrm{Sym}^2V$ 为 9.2.2 中定义的 G_2 不变量,设 v、w 为 V 中两个向量,则有$(\alpha,v\otimes w)=\alpha(v,w)$. 因而得到

$$\mathrm{Ker}(A_I)=\mathrm{Im}(\Phi_I)^{\perp},\qquad(9.2.4a)$$

同理可证

$$\mathrm{Ker}(B'_J)=\mathrm{Im}(\Psi'_J)^{\perp}\text{和 }\mathrm{Ker}(C'_K)=\mathrm{Im}(\theta'_K)^{\perp}.\qquad(9.2.4b)$$

根据已证的引理 1 结合(9.2.4a)与(9.2.4b)中的公式,就得到了引理 2 的分解.

我们用$\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$来表示$\mathbb{S}_\lambda(V)$与 $V^{[n]}$的交集,也就是

$$\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)=\mathrm{Im}(C_\lambda:V^{[n]}\to V^{[n]}).$$

设 μ_1,μ_2 为 G_2 的二个基本权,也就是说 μ_1 是 G_2 的 7 维表示的最高权,μ_2 是 G_2 伴随表示的最高权,我们用 $\Gamma_{a,b}$表示最高权为$a\mu_1+b\mu_2$ 的不可约表示. 特别地,$\Gamma_{0,0}=\mathbb{C}$,$\Gamma_{1,0}=V$,$\Gamma_{0,1}=\mathfrak{g}$.

命题 1 $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$是非零的当且仅当对应于划分 λ 的

Yoing 图至多有 2 行.

证明 我们只需证明在 $n\geqslant 3$ 时 $\wedge^3 V\otimes V^{\otimes(n-3)}$ 包含在定义在 $V^{\otimes(n-d)}(d=1,2,3)$ 上的扩张算子像的并集之中. 作为一个 G_2 的表示, $\wedge^3 V\cong\Gamma_{2,0}\oplus V\oplus\mathbb{C}$. 我们先来证明 $\Gamma_{2,0}\otimes V^{\otimes(n-3)}$ 包含在 $\Psi'_{1,1<2}(V^{\otimes(n-1)})$ 之中, 其他二个不可约表示 V 和 $\mathbb{C}$ 的情形相似. 因为 Ψ' 将 V 映入 $\wedge^2 V$ 之中, 再加上 $V\otimes V$ 中包含了不可约表示 $\Gamma_{2,0}$, 所以 $\Psi'_{1,1<2}(V^{\otimes(n-1)})=\Psi'(V)\otimes V\otimes V^{\otimes(n-3)}$ 包含了 $\Gamma_{2,0}\otimes V^{\otimes(n-3)}$. 根据引理2我们得出 $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)=0$, 如果 $\lambda_3>0$.

现在设 $\lambda=(a+b,b)(a,b\geqslant 0)$ 为 n 的一个不超过两个部分的划分, 我们来证明最高权为 $a\mu_1+b\mu_2$ 的不可约表示的最高权向量不可能包含在任何扩张算子映入 $V^{\otimes n}$ 的像之中. 这一点可以用数学归纳法来完成. 我们用归纳法证明如果一个权为 $a\mu_1+b\mu_2$ 的权向量包含在

$$\Phi_I(V^{\otimes(n-2)})+\Psi'_J(V^{\otimes(n-1)})+\Theta'_K(V^{\otimes(n-3)})$$

之中, 这里的 $I=\{i<j\}$, $J=\{i,j<k\}$ 和 $K=\{i,j<k<l\}$ 中的 i,j,k,l 都是 1 至 n 中的正整数, 那么它必定满足条件 $a+2b<n$. 换言之, 若有 $a+2b=n$, 则有 $\Gamma_{a,b}$ 的最高权向量必定不在扩张算子的像集之中. 我们对 n 作归纳. 当 $n=1$ 时, 这是显然的. 我们假定这一点对所有小于 n 的正整数都成立, 要证明这一点对 n 也成立. 我们不妨设 W 为包含在 $\Psi'_J(V^{\otimes(n-1)})$ 中的一个 G_2 的不可约表示 (若 W 包含在 $\Phi_I(V^{\otimes(n-2)})$ 或 $\Theta'_K(V^{\otimes(n-3)})$ 中可类似于下面的推理). 因为 $\Psi'_J(V^{\otimes(n-1)})\cong\Psi'(V)\otimes V^{\otimes(n-2)}$ 而且 $\Psi'(V)\cong V$ 包含在 $\wedge^2 V$ 之中, 所以 W 包含在 $\Psi'(V)\otimes V^{\otimes(n-2)}$ 之中. 因此, W 必定在 $\Psi'(V)\otimes\Gamma_{a',b'}$ 之中, 这里的 a',b' 满足 $a'+b'=n-2$.

为简明起见，我们记权 $a\mu_1+b\mu_2$ 为 (a,b)． $\Psi'(V)\cong V$ 的权为

$$(1,0),(-1,1),(1,-1),(-1,1),(2,-1),(-2,1)$$

包含在 $\Psi'(V)\otimes\Gamma_{a',b'}$ 中的不可约表示的最高权 (a_1,b_1) 只可为下列的权之一：

$$(a'+1,b'),(a'-1,b'),(a'+1,b'-1),(a'-1,b'+1),(a'+2,b'-1),(a'-2,b'+1).$$

由此得出 $a_1+2b_1\leqslant a'+1+2b'=n-1$ ．这就证明了 $\Gamma_{a,b}(a+2b=n)$ 的最高权向量必定不在扩张算子的像之中．这就完成了命题的证明．

设 $\mathscr{A}$ 为线性空间 $V^{\otimes n}$ 的自同态代数中由全部是 $g\otimes\cdots\otimes g$ $(g\in G_2)$ 的复系数线性组合生成的子代数．

命题 2 $\mathscr{A}$ 限制在 $V^{[n]}$ 上所得到的代数 $\mathscr{A}|V^{[n]}$ 是与所有 S_n 中置换交换的交换子代数．

证明 因为 G_2 是单的李群，所以代数 $\mathscr{A}$ 是半单的．在上面的命题1中我们已经证明 $\mathscr{A}$ 的交换子代数是 $\mathfrak{B}$ ． $\mathfrak{B}$ 是由 S_n 中的置换、收缩算子和扩张算子生成．再根据半单代数的性质，我们得出 $\mathscr{A}$ 也一定是 $\mathfrak{B}$ 的交换子代数．

设 E 是一个与所有 S_n 中的置换相交换的 $V^{[n]}$ 的自同态，我们可以将 E 扩充至 $V^{\otimes n}$ 上的自同态 $\widetilde{E}$，使得 $\widetilde{E}|V^{[n]}=E$，而且 $\widetilde{E}$ 在 $V^{[n]}$ 的正交补上为零映射．这样 $\widetilde{E}$ 是一个与 $\mathfrak{B}$ 中元素都交换的自同态，也就得出 $\widetilde{E}$ 在 $\mathscr{A}$ 之中，所以 E 在 $\mathscr{A}|V^{[n]}$ 之中．

定理 1 设 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$，其中 $\lambda_1=a+b$，$\lambda_2=b$ (a,b 都是非负整数)，那么 $\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$ 是 G_2 的不可约表示 $\Gamma_{a,b}$，也就是最高权为 $a\mu_1+b\mu_2$ 的不可约表示．

证明 我们从命题 2 中知道 $\mathscr{A}|V^{[n]}$ 是关于 $V^{[n]}$ 与群代数

$\mathbb{C}[S_n]$互为交换子代数的．这就得出$\mathbb{S}[\lambda](V)$是一个不可约的$\mathscr{A}|V^{[n]}$——模，也就是一个不可约的G_2的表示．我们可以用下面的方法来确定$\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$的最高权．$G_2$的不可约表示$\Gamma_{a,b}$包含在$\mathrm{Sym}^a(V)\otimes\mathrm{Sym}^b(\mathfrak{g})$之中，而伴随表示$\mathfrak{g}$又是$\wedge^2 V$中的子表示，所以$\Gamma_{a,b}$一定包含在Schur算子$C_\lambda$的像之中，再根据命题1，$F_{a,b}$一定包含在某个$V^{[n]}$的子表示$\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$之中，因此这两个不可约表示相等，$\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$的最高权为$a\mu_1+b\mu_2$．

定理2 作为$G_2\times S_n$的表示，$V^{[n]}$有如下分解

$$V^{[n]}\cong\bigoplus\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)\otimes V_\lambda,$$

这里的求和是让λ遍历不超过两部分的n的划分，也就是所有的$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$满足$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant 0$，而且$\lambda_1+\lambda_2=n$．特别地$\mathbb{S}_{[\lambda]}(V)$在$V^{[n]}$中出现的重数等于$\mathbb{S}_n$不可约表示$V_\lambda$的维数．

证明 这个定理可从命题1和定理1加上关于一般线性群$GL(V)$的张量幂分解公式(9.1.1)得出．

例 下面是当$n=2,3,4$时$V^{[n]}$的分解．

$$V^{[2]}=\Gamma_{2,0}\oplus\Gamma_{0,1};$$

$$V^{[3]}=\Gamma_{3,0}\oplus 2\Gamma_{1,1};$$

$$V^{[4]}=\Gamma_{4,0}\oplus 3\Gamma_{2,1}\oplus 2\Gamma_{0,2}.$$

设d为从0至n的一个非负整数，设$V^{[n]}_{n-d}$为$V^{\otimes n}$中由所有扩张算子$V^{[d]}\to V^{\otimes n}$的像生成的子空间，为清楚起见我们可以写成

$$V^{[n]}_{n-d}=\sum\Phi_I\circ\cdots\circ\Psi'_J\circ\cdots\circ\Theta'_K(V^{[d]}),$$

其中求和是遍取所有的由Φ，Ψ'和Θ'生成的扩张算子的复合使得$V^{[d]}$的像在$V^{\otimes n}$之中．因为这些扩张算子都是单一的映射，所以$V^{[n]}_{n-d}$同构于许多个子空间$V^{[d]}$的直和．这就得出$V^{[n]}_{n-d}$中的G_2的不可约表示与$V^{[d]}$中G_2的不可约表示相同．

当 $d=n$ 时,显然有 $V_0^{[n]}=V_{n-n}^{[n]}$,即 $V^{[n]}$.

定理 3 张量幂 $V^{\otimes n}$可以分解为下列子空间的直和

$$V^{\otimes n}=V_0^{[n]}\oplus V_1^{[n]}\oplus\cdots\oplus V_n^{[n]}.$$

证明 运用引理 2 再对 n 作归纳法,我们得到 $V^{\otimes n}$是所有 $V_{n-d}^{[n]}(d=0,\cdots,n)$的和. 我们还需证明这是一个直和. 根据定理2当 $i\neq j$ 时 $V_i^{[n]}$与 $V_j^{[n]}$中所包含的 G_2 的不可约表示互不同构,这就证明了 $V_i^{[n]}$与 $V_j^{[n]}$的交集为$\{0\}$. 因此,上述空间的分解为直和分解.

例 根据我们前面的定义

$$V^{[0]}=V^{\otimes 0}=\mathbb{C},$$

$$V^{[1]}=V^{\otimes 1}=V.$$

因此,我们可以得到

$$V^{\otimes 2}=V\otimes V\cong V^{[2]}\oplus V\oplus\mathbb{C},$$

这也正是定理 3 中所得到的结论.

§9.3 忠实的基本表示

设 $\mathfrak{g}$ 为非平凡的复单李代数. 设 $\mathfrak{g}_c$ 为 $\mathfrak{g}$ 的紧实型. 设 G 为单连通的紧李群,其李代数为 $\mathfrak{g}_c$. $\mathfrak{g}$ 的不可约有限维表示与 G 的不可约表示一一对应. 设 V 是 G 的非平凡的维数最小的不可约表示,我们要问:任意一个 G 的不可约表示是否都在 V 的某个张量幂 $V^{\otimes k}$ 中出现? 这个问题的答案除了在 $G=\mathrm{Spin}(n)$时对于其他单的李群都是肯定的. 这样我们就可以在了解不变量理论的前提下将 Weyl 构造和张量幂分解推广到非典型上,这一点在上一节中也提到过.

更一般地来说,设 λ_i 为 $\mathfrak{g}$ 的一个基本权,$V(\lambda_i)$是相应的基本表示,我们可以提出下列问题:是否 G 的任何一个不可约表示都在 $V(\lambda_i)$的某个张量幂 $V(\lambda_i)^{\otimes k}$中作为子表示出现? 对于这个问题,我们甚至可以在更广的范围里问:对于给定的一个 G 的不可约表示 V,是否 G 的任何不可约表示都在 V 的某个张量幂 $V^{\otimes k}$中出现? 我们将在下面说明这个问题等价于 V 是否为G 的忠实表示. 如果 V 的最高权是λ,我们将阐述如何确定 V 是否为忠实表示. 特别地,我们将看到除了 $G=\mathrm{Spin}(4n)$之外所有单的紧李群 G 都有不可约的忠实表示.

在§9.1 中我们曾经提到,给定 G 的一个不可约表示 V,由所有张量幂 $V^{\otimes k}$的矩阵系数生成G 上全体连续函数$C(G)$中的一个子代数 S . 如果 G 的某一个不可约表示 W 不在 V 的任何张量幂中出现,那么 W 的矩阵系数与S 中的函数是正交的,也就是说 S 必须是$C(G)$的真子代数. 但是 S 包含了常数函数,这是因为 $\wedge^{\dim V}V\cong\mathbb{C}$. 又因为 $\wedge^{(\dim V-1)}V\cong V^*$,所以 S 其复共轭也是封闭的. 根据 Stone - Weierstrass 定理,$S=C(G)$当且仅当 S 还是可以区分点的,这个条件等价于 V 是否为G 的忠实表示. 因此,我们证明下面的命题.

命题 设 V 是单紧李群G,的不可约表示,G 的任何不可约表示都在V 的某个张量幂 $V^{\otimes k}$中出现的充分必要条件是 V 是G 的忠实表示. 特别地,如果 G 是单紧李群,V 是忠实的当且仅当G 的中心$Z(G)$在 V 上的作用是忠实的.

我们现在对每个单连通的单紧李群 G,逐一刻画 G 的哪些不可约表示是忠实的. 设 λ_i 为G 的第 i 个基本权$(\pi_i,V(\lambda_i))$为对应的基本表示.

A_l 型:Dynkin 图为

$$(A_l) \quad \underset{1}{\circ} - \underset{2}{\circ} \cdots \underset{l-2}{\circ} - \underset{l-1}{\circ} - \underset{l}{\circ}$$

对应的紧李群 $G = SU(l+1)$, G 的中心

$$Z(G) = \{z \mid \cdot z^{n+1} = 1\} \cong \mathbb{Z}_{l+1}.$$

我们可以算出 $\rho_i(z) = \varepsilon^i$,其中 ε 是一个素$(l+1)$次单位根. 因此,ρ_i 是忠实的当且仅当 i 与 $l+1$ 互素.

最高权为 $\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$ 的不可约表示 $V(\lambda)$是忠实的当且仅当

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \cdots + l \cdot m_l$$

与 $l+1$ 是互素的.

B_l 型:Dynkin 图为

$$(B_l) \quad \underset{1}{\circ} - \underset{2}{\circ} \cdots \underset{l-2}{\circ} - \underset{l-1}{\circ} \Rightarrow \underset{l}{\circ}$$

对应的紧李群 $G = \mathrm{Spin}(2l+1)$, G 的中心

$$Z(G) = \{z \mid z^2 = 1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

我们可以得出 $\rho_i(z) = 1(i \leqslant l-1)$, $\rho_l(z) = -1$. 因此,在基本表示中只有半旋表示 ρ_l 是忠实的.

最高权为 $\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$ 的不可约表示 $V(\lambda)$是忠实的当且仅当 m_l 是奇数.

C_l 型:Dynkin 图为

$$(C_l) \quad \underset{1}{\circ} - \underset{2}{\circ} \cdots \underset{l-2}{\circ} - \underset{l-1}{\circ} \Leftarrow \underset{l}{\circ}$$

对应的紧李群 $G = Sp(2l)$, G 的中心

$$Z(G) = \{z \mid z^2 = 1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

我们可以算出 $\rho_i(z) = (-1)^i$. 因此,ρi 是忠实的当且仅当 i 是奇数.

最高权为 $\lambda = m_1\lambda_1 + \cdots + m_l\lambda_l$ 的不可约表示 $V(\lambda)$是忠实的当且仅当

$$1\cdot m_1+2\cdot m_2+\cdots+l\cdot m_l$$

是奇数，也就是当且仅当

$$m_1+m_3+\cdots+m_{2[\frac{l-1}{2}]+1}$$

是奇数.

D_l 型：Dynkin 图为

$$(D_l)\qquad \underset{1}{\circ}—\underset{2}{\circ}\cdots\underset{l-3}{\circ}—\underset{l-2}{\circ}\begin{matrix}\diagup\circ\, l-1\\ \\ \diagdown\circ\, l\end{matrix}$$

相应的紧李群 $G=\mathrm{Spin}(2l)$，G 的中心

$$Z(G)=\begin{cases}\{z\mid z^4=1\}\cong\mathbb{Z}_4, & 若\ l=2k+1;\\ \{z,z'\mid z^2=z'^2=1\}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2, & 若\ l=2k\ .\end{cases}$$

当 $l=2k+1$ 为奇数时，$\rho_i(z)=(-1)^i(i\leqslant l-2)$，$\rho_{l-1}(z)=\rho_l(z)^{-1}=\sqrt{-1}$，这时只有二个基本表示 ρ_{l-1} 和 ρ_l 是忠实的，也就是二个半旋表示是忠实的．最高权为 $\lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_l\lambda_l$ 的不可约表示 $V(\lambda)$是忠实的当且仅当 $m_{l-1}+m_l$ 是奇数.

当 $l=2k$ 为偶数时，$\rho_i(z)=\rho_i(z')=(-1)^i(i\leqslant l-2)$，$\rho_{l-1}(z)=\rho_l(z')=1$，$\rho_{l-1}(z')=\rho_l(z)=-1$，这时所有的基本表示都不是忠实的，而且 G 的任何不可约表示(ρ,V)都不是忠实的．设 V 的最高权$\lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_{l-1}\lambda_{l-1}+m_l\lambda_l$，若要 $\rho(zz')=-1$，我们必须要求 $m_{l-1}+m_l$ 为奇数，这时 m_{l-1}与 m_l 之中必有一个偶数，若 m_{l-1}为偶数则有 $\rho(z')=1$，若 m_l 为偶数则有$\rho(z)=1$ ．所以 ρ 不可能是忠实表示．在这种情况上，G 还是有忠实表示的，只是这些忠实表示不是不可约的，例如两个半旋表示的直和 $\rho_{l-1}\oplus\rho_l$就是一个忠实表示.

E_6 型：Dynkin 图为

$$(E_6) \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \circ 2 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ \\ 1 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 \end{array}$$

我们用 $G=E_6$ 来代表相应的单连通紧李群，G 的中心

$$Z(G)=\{z \mid z^3=1\} \cong \mathbb{Z}_3.$$

我们可以算出

$$\rho_i(z)=\begin{cases}1, & 若\ i=2,4;\\ \varepsilon, & 若\ i=1,6;\\ \varepsilon^2, & 若\ i=3,5.\end{cases}$$

其中 ε 是一个素的 3 次单位根．所以，忠实的基本表示是 $\rho_i(i=1,3,5,6)$．

最高权是 $\lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_6\lambda_6$ 的不可约表示 $V(\lambda)$是忠实的当且仅当 $m_1+2m_3+2m_5+m_6$ 不是 3 的倍数．

E_7 型：Dynkin 图为

$$(E_7) \qquad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & \circ 2 & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & \\ \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ \\ 1 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \end{array}$$

我们用 $G=E_7$ 代表相应的单连通的紧李群，其中心

$$Z(G)=\{z \mid z^2=1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

可以算出

$$\rho_i(z)=\begin{cases}1, & 若\ i=3,4,6,7;\\ -1, & 若\ i=1,2,5.\end{cases}$$

因此，基本表示中 $\rho_i(i=1,2,5)$是忠实的．最高权为 $\lambda=m_1\lambda_1+\cdots+m_7\lambda_l$ 的不可约表示 $V(\lambda)$是忠实的当且仅当 $m_1+m_2+m_5$ 是奇数．

E_8 型：Dynkin 图为

$$
(E_8)\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & \overset{2}{\circ} & & & & & & & & \\
 & & & & | & & & & & & & & \\
\circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\
1 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8
\end{array}
$$

我们用 $G=E_8$ 代表相应的单连通的紧李群. G 的中心 $Z(G)$ 是平凡的. 因此,G 的所有基本表示都是忠实的,而且 G 的任何表示(可约与不可约)也都是忠实的.

F_4 型:Dynkin 图为

$$
(F_4)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\circ & - & \circ & \Rightarrow & \circ & - & \circ \\
1 & & 2 & & 3 & & 4
\end{array}
$$

我们用 $G=F_4$ 来代表相应的单连通紧李群. G 的中心是非平凡的. 因此,G 的所有基本表示都是忠实的,而且 G 的任何表示(可约的与不可约的)也都是忠实的.

G_2 型:Dynkin 图为

$$
(G_2)\qquad
\begin{array}{ccc}
\circ & \Lleftarrow & \circ \\
1 & & 2
\end{array}
$$

我们用 $G=G_2$ 来代表相应的单连通紧李群. G 的中心是平凡的. 因此,G 的所有基本表示都是忠实的,而且 G 的任何表示(可约的与不可约的)也都是忠实的.

注 上面的逐一检验证明了单连通的紧单李群都有忠实表示. 一个非单的单连通紧李群是一些单连通的紧单李群与环面的直积,这样的紧李群一定有忠实表示. 这就证明了一般的紧李群有忠实表示. 这样我们在 §8.5 中对 Peter-Weyl 定理的证明就全部完成了.

第十章　非紧李群的结构

§10.1　线性既约群与 Cartan 分解

一个线性既约群定义为实的或者是复的矩阵群的闭子群，使得它在复共轭和转置变换下是封闭的．一个线性半单群是中心只有有限个元素的线性既约群．

设 G 为线性既约群，因为 G 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 或 $GL(n,\mathbb{C})$ 的闭子群，所以 G 是一个李群．设 G 的李代数为 $\mathfrak{g}$，那么 $\mathfrak{g}$ 是由实矩阵或复矩阵组成的李代数．我们用 Θ 表示矩阵的取逆、复共轭再加转置的变换．Θ 是 G 的一个自同构，而且它满足 $\Theta^2=1$．我们把这个自同构 Θ 称为 G 的 Cartan 对合．我们定义

$$K=\{g\in G\mid\theta(g)=g\}.$$

那么 K 是 G 的闭子群，我们将要看到 k 是 G 的一个极大紧致子群．

G 的自同构 Θ 的微分 θ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构，这个映射是变号、复共轭再加置换．设 $\mathfrak{k}$ 与 $\mathfrak{p}$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的关于 θ 的特征值是 $+1$ 和 -1 的特征子空间．因为 $\theta^2=1$，所以我们有下面的 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}.$$

显然地,我们有下列关系

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k},[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p},[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{k}.$$

特别地,$\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子李代数,实际上它是 G 的子群 G 的李代数.下面的定理是关于 G 的 Cartan 分解.

定理 设 G 为线性既约群,Θ 为 G 的 Cartan 对合. 那么 $K=G^{\Theta}$ 是 G 的一个极大的紧致子群. 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解. 那么下面的映射 $\mathfrak{k}\times\mathfrak{p}\rightarrow G$,

$$(k,X)\mapsto k\exp(X)$$

是一个微分同胚.

我 们 不 在 这 里 给 出 定 理 的 证 明, 只 是 说 明 在 $G=GL(n,\mathbb{R})$时,Cartan 分解为什么成立. $GL(n,\mathbb{R})$的 Cartan 分解实际就是实矩阵的极分解. 对于一般典型群的 Cartan 分解的证明,读者可以参阅[K]第 8 页.

例 设 $G=GL(n,\mathbb{R})$. G 中任何一个元素 g 都有惟一的分解 $g=o\cdot p$,其中 o 是一个正交矩阵,而 p 则是一个正定的对称矩阵. 为了证明这一点,我们只需要考虑矩阵 $q=g^tg$,这是一个正定对称矩阵,它有惟一的一个正定矩阵 $p=(g^tg)^{1/2}$为其平方根. 令 $o=g\cdot p^{-1}$,那么

$$\begin{aligned} oo^t &= g\cdot p^{-1}(g\cdot p^{-1})^t=g(p^{-1}p^{-1})g^t \\ &= g(q^tg)^{-1}g^t=1\ . \end{aligned}$$

因此,o 是正交矩阵. 这个分解的惟一性是由 p 是 g^tg 惟一的正的平方根所保证的.

所有正定的对称矩阵是由所有对称矩阵构成的线性空间 $\mathfrak{p}$ 中的一个凸子集 $\mathscr{P}$. 因而 $\mathscr{P}$微分同胚于欧氏空间$\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$,而且 $GL(n,\mathbb{R})$微分同胚于 $O(n)\times\mathscr{P}$. $\mathscr{P}$中所有的元素并不构成一个群,但是它们都是 $\mathfrak{p}$ 中元素在指数映射下得到的.

我们曾经定义半单李代数 $\mathfrak{g}$ 为单李代数的直和,在直和中

的每个单李代数都是 $\mathfrak{g}$ 的单的理想.

命题 设 G 为线性半单群,那么其李代数 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数. 更一般地,若 G 为线性既约群,那么

$$\mathfrak{g} = Z_{\mathfrak{g}} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

是理想的直和. 其中 $Z_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心,而交换子$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$是半单李代数.

这个命题的证明,读者可以在[K]中第 8 页上找到.

§ 10.2 其他的分解

设 G 为线性半单群,K 为 G 的由 Cartan 对合确定的极大紧子群. 设 G 的李代数为 $\mathfrak{g}$,其 Cartan 分解为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. 在 $\mathfrak{g}$ 上可以定义一个正定的内积

$$\langle X, Y \rangle = -\mathrm{Re}.\, B(X, \theta Y),$$

其中 B 是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型,θ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 对合. 设 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{p}$ 中一个极大的交换子空间. 因为 $ad(\mathfrak{p})$中的元素关于上述内积都是对称的线性变换,所以 $ad(\mathfrak{a})$中的元素是一族两两交换的 $\mathfrak{g}$ 上的对称的线性变换,因而可以同样对角化. 对于 $\mathfrak{a}$ 上的任何一个线性泛函 λ,我们定义

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \lambda(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

如果 $\lambda \neq 0$,而且 $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$,我们称这样的 λ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个约束根,$\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{g}_\lambda$ 称为约束根子空间. 我们用 $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}:\mathfrak{a})$代表所有约束根组成的集合.

命题 我们有下列约束根子空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Phi} \mathfrak{g}_\lambda .$$

约束根与约束根子空间还满足下列关系式：

(i) $[\mathfrak{g}_\lambda,\mathfrak{g}_\mu]\subseteq\mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$；

(ii) $\theta\mathfrak{g}_\lambda=\mathfrak{g}_{-\lambda}$，而且若有 $\lambda\in\Phi$ 必有 $-\lambda\in\Phi$；

(iii) 若 $\lambda\neq\mu$，则 $\mathfrak{g}_\lambda$ 与 $\mathfrak{g}_\mu$ 是关于内积 $\langle,\rangle$ 正交的；

(iv) $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{m}=Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ 是 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{k}$ 中的中心化子，这里的直和是正交的直和.

证明 从 Jacobi 恒等式中可以得出

$$\begin{aligned}[H,[X_\lambda,X_\mu]]&=[[H,X_\lambda],X_\mu]+[X_\lambda,[H,X_\mu]]\\&=(\lambda(H)+\mu(H))[X_\lambda,X_\mu].\end{aligned}$$

这就证明了(i). 因为 θ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构，而且 θ 在 $\mathfrak{a}$ 上的作用是数乘 -1，所以

$$\begin{aligned}-[H,\theta(X_\lambda)]&=[\theta(H),\theta(X_\lambda)]=\theta([H,X_\lambda])\\&=\lambda(H)\theta(X_\lambda).\end{aligned}$$

这就得到 $[H,\theta(X_\lambda)]=-\lambda(H)\theta(X_\lambda)$，也就证明了(ii). 因为

$$\begin{aligned}\langle[H,X_\lambda],X_\mu\rangle&=-\mathrm{Re}B([H,X_\lambda],\theta X_\mu)\\&=-\mathrm{Re}B(X_\lambda,[-H,\theta X_\mu])\\&=-\mathrm{Re}B(X_\lambda,\theta[H,X_\mu])\\&=\langle X_\lambda,[H,X_\mu]\rangle,\end{aligned}$$

所以我们得出

$$\lambda(H)\langle X_\lambda,X_\mu\rangle=\mu(H)\langle X_\lambda,X_\mu\rangle$$

对所有的 $H\in\mathfrak{a}$ 都成立. 因此，若有 $\lambda\neq\mu$ 必有 $\langle X_\lambda,X_\mu\rangle=0$，这就证明了(iii). 要证明(iv)我们首先由(ii)得出 $\theta\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_0$，因而 $\mathfrak{g}_0=(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_0)\oplus(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{g}_0)$. 因为 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}\cap\mathfrak{g}$，而且 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$ 中一个极大交换子空间，所以 $\mathfrak{a}=p\cap\mathfrak{g}_0$，这就证明了 $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_0=Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$.

我们可以在约束根集 Φ 上定义一个序，正像我们在 §4.3 中对根系定义一个序一样. 设 Φ^+ 为正根集，我们定义

$$\mathfrak{n}=\sum_{\lambda\in\Phi^+}\mathfrak{g}_\lambda .$$

显然 $\mathfrak{n}$ 是一个幂零李代数，这一点可以由上面命题中的(ii)得出.

引理 我们有如下的直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n} .$$

证明 根据上面所证命题中(ii)和(iv)的关系式，我们得出 k 中非零元素或者在 m 上投影不为零或者在 $\sum_{\lambda\in\Phi}\mathfrak{g}_{-\lambda}$ 上的投影不为零. 因此，作为线性空间的和 $\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ 是直和. 这个直和是整个 $\mathfrak{g}$，这是因为我们可以把 $\mathfrak{g}$ 中任何元素 $Y=H+X_0+\sum X_\lambda$（其中 $H\in\mathfrak{a}, X_0\in\mathfrak{n}, X_\lambda\in\mathfrak{g}_\lambda$）写成以下的形式

$$Y=\{X_0+\sum_{\lambda\in\Phi_\lambda^+}(X_{-\lambda}+\theta X_{-\lambda})\}+H+\{\sum_{\lambda\in\Phi_\lambda^+}(X_\lambda-\theta X_{-\lambda})\}.$$

这样 Y 包含在 $\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$ 之中. 这就证明了引理.

定理(Iwasawa 分解) 设 G 为线性半单群. 设 A 与 N 分别为 G 的李代数为 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{n}$ 的解析子群. 那么 A 和 N 都是 G 的单连通闭子群，而且下面的乘法映射

$$K\times A\times N\to G,(k,a,n)\mapsto kan$$

是一个微分同胚.

我们以 $G=SL(n,\mathbb{C})$ 与 $G=SL(n,\mathbb{R})$ 为例，证明 G 的 Iwasawa分解. 关于这两个群的 Iwasawa 分解的证明，就是线性代数中的 Gram - Schmidt 正交化方法. 我们先假设 $G=SL(n,\mathbb{C})$，G 中每一个元素 g 的向量 $v_1,\cdots,v_n$ 是$\mathbb{C}$空间的一组基，运用 Gram - Schmidt 正交化方法，我们得到一组标准正交基 $u_1,\cdots,u_n$，这 n 个向量组成一个 Hermitian 矩阵 $u\in SU(n)$. 因此，g 可以分解为 u 乘以一个上三角矩阵. 对于 $G=SL(n,\mathbb{R})$证明方法相同，只要用 $SO(n)$来代替 $SU(n)$.

另外还有 G 的两个分解：KAK 分解与 Bruhat 分解. KAK

分解是指 G 中任何元素可以写成 k_1ak_2,其中 $k_1,k_2\in K,a\in A$.在这个分解中,a 除了在小 Weyl 群 $W(\mathfrak{a})$作用之外是惟一确定的,这里的小 Weyl 群的定义是 $W(\mathfrak{a})=N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$. 我们现在以 $G=SL(n,\mathbb{R})$为例来说明 KAK 分解的存在性. 我们先用§10.1 中的极分解将矩阵 g 写成正交矩阵与正定矩阵的乘积 $g=OP$,然后用另一个正交矩阵 O_1 将正定矩阵 P 对角化,也就是说 $g=OO_1(O_1^{-1}PO_1)O_1^{-1}$,而 OO_1 与 O_1^{-1} 也都是正交矩阵,这就证明了 $SL(n,\mathbb{R})$的 KAK 分解. Bruhat 分解是指 G 可以写成子群 MAN 的双陪集的并集,也就是

$$G=\bigcup_{w\in W(\mathfrak{a})}\mathrm{MAN}\tilde{w}\mathrm{MAN},$$

其中 $M=Z_K(\mathfrak{a})$,$\tilde{w}$ 是小 Weyl 群中元素 w 在 $N_K(\mathfrak{a})$中的一个代表元素. 我们以 $G=SL(2,\mathbb{R})$为例,$\mathrm{MAN}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\0 & a^{-1}\end{pmatrix}\right\}$. 正规化子 $N_K(\mathfrak{a})$包含 4 个矩阵 $\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$和 $\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$. 因此,$W(\mathfrak{a})\cong\mathbb{Z}_2$. 我们记 $\tilde{w}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$为 $W(\mathfrak{a})$中非平凡元素的代表元. 对于 G 中任何一个元素 $g=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$,如果 $c=0$,则有 g 在 MAN 之中;如果 $c\neq o$,则有

$$g=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & ac^{-1}\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\0 & c^{-1}\end{pmatrix}$$

在 $\mathrm{MAN}\tilde{w}\mathrm{MAN}$ 之中. 因此,G 是 MAN 的 2 个双陪集之并.

§ 10.3　实单李代数与 Riemann 型对称空间

在这一节中我们列出全部的实单李代数. 有两类不同形式的实单李代数,一类是复单李代数作为实李代数来看,另一类是复单李代数的实形式. 第一类实单李代数对应于复单李代数,它们与 Dynkin 图一一对应(参阅 § 4.7). 我们现在来看看第二类实单李代数.

给定一个定义在$\mathbb{C}$上的单李代数$\mathfrak{g}$,它的实形式由反全纯的$\mathfrak{g}$的对合所确定的,$\mathfrak{g}$的实形式定义为这样的对合的不动点的集合. 两个不同的对合在 Aut($\mathfrak{g}$)中共轭的充分必要条件是它们分别所确定的不动点集是同构的实李代数. 这个事实的证明可以在[He]定理 6.1 中找到.

每个复单李代数$\mathfrak{g}$都有一个紧实型$\mathfrak{g}_c$. 因而所有的紧实型也是与 Dynkin 图一一对应的,紧实型所对应的群是紧致李群. $\mathfrak{g}$还有许多非紧的实形式,这些实李代数所对应的李群都是非紧的李群. 我们现在列出所有的非紧的实形式.

A 型:设$\mathfrak{g}=sl(n,\mathbb{C})$. 最明显的实形式是分裂实形式$\mathfrak{g}_0=sl(n,\mathbb{R})$. $sl(n,\mathbb{C})$还有一系列的实形式$su_{p,q}(p+q=n)$,其定义如下:

$$su_{p,q}=\{X\in sl_{p+q}(\mathbb{C})\mid XI_{p,q}+I_{p,q}\overline{X}^T=0\}.$$

这里的$\overline{X}$是关于复结构X的共轭. 如果n是偶数,设$n=2m$,$sl(2m,\mathbb{C})$还有一个实形式$su_{2m}^*=sl(m,\mathbb{H})$. 以上这些是$sl(n,\mathbb{C})$的全部互不同构的实形式.

B 型和 D 型:设$\mathfrak{g}=so(n,\mathbb{C})$. $\mathfrak{g}$有一系列的实形式$so(p,$

$q)(p+q=n)$,其定义如下:

$$so(p,q)=\{X\in sl(p+q,\mathbb{R})\mid XI_{p,q}+I_{p,q}X^T=0\}.$$

如果 n 是偶数,设 $n=2m$, $so(2m,\mathbb{C})$还有一个实形式

$$so^*(2m)=\{X\in sl(m,\mathbb{H})\mid X+\overline{X}^T=0\}.$$

这里的 $\overline{X}$ 是关于四元数结构 X 的共轭. 以上是 $so(n,\mathbb{C})$全部互不同构的实形式.

C 型:设 $\mathfrak{g}=sp(2n,\mathbb{C})$,最显然的是分裂实形式 $sp(2n,\mathbb{R})$. $sp(2n,\mathbb{C})$还有一系列的实形式 $sp(2p,2q)(p+q=n)$,其定义为

$$sp(2p,2q)=\{X\in sl(p+q,\mathbb{H})\mid XI_{p,q}+I_{p,q}\overline{X}^T=0\}.$$

这里的 $\overline{X}$ 是关于四元数结构 X 的共轭, $I_{p,q}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$ (其中 1 有 p 个, -1 有 q 个).

以上是 $sp(2n,\mathbb{C})$的所有互不同构实形式.

E 型:非典型的复单李代数 $\mathfrak{e}_6$ 有 4 个互不同构非紧的实形式, $\mathfrak{e}_7$ 有 3 个互不同构非紧的实形式, $\mathfrak{e}_8$ 有 2 个互不同构的非紧实形式.

F 型:复单李代数 $\mathfrak{f}_4$ 有 2 个互不同构的实形式.

G 型:复单李代数 $\mathfrak{g}_2$ 只有 1 个互不同构的实形式.

定理 设 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 为同一个复单李代数的两个不同的实形式. 设 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{k}_1\oplus\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2=\mathfrak{k}_2\oplus\mathfrak{p}_2$ 分别为 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 的 Cartan 分解. 如果 $\mathfrak{k}_1\cong\mathfrak{k}_2$ 那么 $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_2$.

读者可以在[He]的定理 6.2 中找到证明. 根据这个定理,一个实形式 $\mathfrak{g}_0$ 完全由其极大紧子代数 $\mathfrak{k}$ 确定. 而 $\mathfrak{k}_0$ 则是 Cartan 对合的不动点集. 如果一个实李代数 $\mathfrak{g}_0$ 本身也是复李代数,那么 $\mathfrak{k}_0$ 就是 $\mathfrak{g}_0$ 的紧实型. 下面我们列出所有的$(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{k}_0)$,其

中 $\mathfrak{g}_0$ 为复单李代数的实形式,而且 $\mathfrak{g}_0$ 自身并不是复李代数. 若 $\mathfrak{g}_0$ 为非典型复单李代数的实形式,我们用括号中的数值表示 $\dim\mathfrak{p}_0-\dim\ \mathfrak{k}_0$.

	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{k}_0$
AI	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(n)$
AII	$\mathfrak{su}^*(2n)$	$\mathfrak{so}(2n)$
AIII	$\mathfrak{su}(p,q)$	$s(\mathfrak{u}(p)+\mathfrak{u}(q))$
BDI	$\mathfrak{so}(p,q)$	$\mathfrak{so}(p)+\mathfrak{so}(q)$
DIII	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{u}(n)$
CI	$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{u}(n)$
CII	$\mathfrak{sp}(2p,2q)$	$\mathfrak{sp}(2p)+\mathfrak{sp}(2q)$
EI	$\mathfrak{e}_6(6)$	$\mathfrak{sp}(4)$
EII	$\mathfrak{e}_6(2)$	$\mathfrak{su}(6)+\mathfrak{su}(2)$
EIII	$\mathfrak{e}_6(-14)$	$\mathfrak{so}(10)+\mathfrak{so}(2)$
EIV	$\mathfrak{e}_6(-26)$	$\mathfrak{f}4$
EV	$\mathfrak{e}_7(-7)$	$\mathfrak{su}(8)$
EVI	$\mathfrak{e}_7(-5)$	$\mathfrak{so}(12)+\mathfrak{su}(2)$
EVII	$\mathfrak{e}_7(-25)$	$\mathfrak{e}_6+\mathfrak{so}(2)$
EVIII	$\mathfrak{e}_8(8)$	$\mathfrak{so}(16)$
EIX	$\mathfrak{e}_8(-24)$	$\mathfrak{e}_7+\mathfrak{su}(2)$
FI	$\mathfrak{f}_4(4)$	$\mathfrak{sp}(3)+\mathfrak{su}(2)$
FII	$\mathfrak{f}_4(20)$	$\mathfrak{so}(9)$
G	$\mathfrak{g}_2(2)$	$\mathfrak{su}(2)+\mathfrak{su}(2)$

非紧致的单李群与不可约的非紧致 Riemann 对称空间有一一对应的关系. 设 σ 为李群 G 的一个对合,也就是 G 上的一个自同构满足 $\sigma^2=1$. 设 H 是 G 的满足 $G_0^\sigma\subseteq H\subseteq G^\sigma$ 的一个闭子群. 那么 $X=G/H$ 就是一个对称空间. 设 G 的李代数为

$\mathfrak{g}$，σ 的微分诱导出 $\mathfrak{g}$ 上的一个对合，我们仍然用 σ 来表示这个 $\mathfrak{g}$ 上的对合．设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$ 是关于 σ 的特征值为 $+1$ 与 -1 的特征空间分解．这里的 $\mathfrak{h}$ 是 H 的李代数，$\mathfrak{q}$ 则与 X 在基点 eH 上的切空间同构．显然，

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h},[\mathfrak{h},\mathfrak{q}]\subset\mathfrak{q},[\mathfrak{q},\mathfrak{q}]\subset\mathfrak{h}.$$

$\mathfrak{g}$ 的 Killing 型诱导了 X 上的一个 G 不变度量．我们称对称空间 X 为 Riemann 型的，如果这个 G 不变度量是正定的．如果 G 是紧致李群，那么所有的对称空间 G/H 都是 Riemann 型的．如果 G 是一个非紧致的半单李群，我们取 σ 为 Cartan 对合 θ，那么 G/K 是一个非紧致的 Riemann 型对称空间．

假设 $\mathfrak{q}_1$ 是 $\mathfrak{q}$ 中一个 H 一不变子空间，那么 $\mathfrak{g}_1=[\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_1]+\mathfrak{q}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 中一个子李代数．设 G_1 为 G 中李代数为 $\mathfrak{g}_1$ 的解析子群，并设 $H_1=G_1\cap H$．那么 $X_1=G_1/H_1$ 就是 $X=G/H$ 中的一个子对称空间．我们把 X_1 称为 X 的不变子对称空间，如果 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想．一个对称空间 X 称为是不可约的，如果 X 没有非平凡的不变子对称空间．

命题（[F－J]） 对称空间 $X=G/H$ 是不可约的当且仅当 X 是一维的，或者 $\mathfrak{g}$ 是单李代数，或者 $\mathfrak{g}$ 是二个同构的单理想 $\mathfrak{g}_1$ 的直和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1$，而且 $\sigma(X,Y)=(Y,X)$．

我们把一维的对称空间称为平凡的．下面提到的不可约对称空间都假定为非平凡的．我们称 $X=G/H$ 为典型的，如果 G 是典型群．紧致的与非紧致的 Riemann 型对称空间有着一一对应的关系．我们把典型的 Riemann 型不可约对称空间列出．为了避免不同的覆盖空间给出不同的对称空间带来的麻烦，我们只列出那些有相同单连通覆盖空间的不同对称空间中的一个．

	紧致的	非紧致的
$A\times A\supset A$	$SU_n\times SU_n/\Delta$	$SL_n(\mathbb{C})/SU_n$
$BD\times BD\supset BD$	$SO_n\times SO_n/\Delta$	$SO_n(\mathbb{C})/SO_n$
$C\times C\supset C$	$Sp_n\times Sp_n/\Delta$	$Sp_{2n}(\mathbb{C})/Sp_n$
$A\supset A\times A$	$SU_{p+q}/S(U_p\times U_q)$	$SU_{p,q}/S(U_p\times U_q)$
$BD\supset BD\times BD$	$SO_{p+q}/SO_p\times SO_q$	$SO_{p,q}/SO_p\times SO_q$
$C\supset C\times C$	$Sp_{p+q}/Sp_p\times Sp_q$	$Sp_{p,q}/Sp_p\times Sp_q$
$A\supset BD$	SU_n/SO_n	$SL_n(\mathbb{R})/SO_n$
$A\supset C$	SU_{2n}/Sp_n	$SL_n(\mathbb{H})/Sp_n$
$BD\supset A$	SO_{2n}/U_n	$SO_{2n}^{\star}/U_n$
$C\supset A$	Sp_{2n}/U_n	$Sp_{2n}(\mathbb{R})/U_n$

我们现在解释上面表格中所用的符号．A,B,C,D 自然是指其中的典型单群的复化李代数所对应的 Dynkin 图的类型．如果$\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$，那么 $SL(n,\mathbb{F})$是指行列式为 1 的矩阵元在$\mathbb{F}$中的 $n\times n$ 矩阵组成的群．$SO_{p,q}$，$SU_{p,q}$和$Sp_{p,q}$是保持分别定义在$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$和$\mathbb{H}$上以下的 Hermitian 形式不变的矩阵群：

$$|Z_1|^2+\cdots+|Z_p|^2-|Z_{p+1}|^2-\cdots-|Z_{p+q}|^2 .$$

复正交群 $O_n(\mathbb{C})$与复辛群 $Sp_{2n}(\mathbb{C})$分别是复矩阵群中保持对应于单位矩阵 I_n 和反对称矩阵 $J=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$的二次型不变的子群．$Sp_{2n}(\mathbb{R})$是 $Sp_{2n}(\mathbb{C})$的分裂实形式，而 Sp_n 是 $Sp_{2n}(\mathbb{C})$的紧实形，换言之 Sp_n 是 $Sp_{2n}(\mathbb{C})$的极大紧子群．最后，我们指出

$$SO_{2n}^{\star}=\left\{g\in SU_{n,n}\,|\,g^t\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}g=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

另外还有 17 个紧致的和 17 个非紧致的非典型的 Riemann 型不可约对称空间．这当中的 5 个紧致是非典型的紧李群 $G\times G/_{\Delta}$，5 个非紧致的是复单非典型李群模去其紧实型 $G_{\mathbb{C}}/G$．

第十一章　非紧李群的表示

§11.1　表示与$(\mathfrak{g}, K)$—模

设 G 是一个李群．G 的在非零的复 Hilbert 空间 V 上的表示是一个从G 到 V 上所有有界可逆算子群的同态π,使得

$$G\times V\rightarrow V,(g,v)\mapsto\pi(g)v$$

是一个连续映射．

G 的一个表示(π, V)称为酉表示,如果对每一个 $g\in G$, $\pi(g)$都是酉算子,也就是 $\pi(g)\pi(g)^* = \pi(g)^*\pi(g)=I$．$G$ 的一个表示(π, V)称为不可约的,如果它只有$\{0\}$和 V 两个G 不变子空间．

两个 G 的表示(π, V)与(π', V')称为等价的,如果存在一个有界可逆线性算子 $A:V\rightarrow V'$,使得

$$\pi'(g)A = A\pi(g)$$

对所有的 $g\in G$ 都成立．假设 π 和π'都是酉表示,我们称它们是酉等价的,如果它们是等价的,而且定义它们等价的有界可逆线性算子 A 是酉算子,也就是 $A^*A=I_V, AA^*=I_{V'}$．

命题　设 G 是一个线性半单李群．那么 G 的非平凡不可约酉表示都是无限维的．

证明 我们不妨设 G 是单李群,亦即其李代数 $\mathfrak{g}_0$ 为单李代数. 假设 G 有一个 n 维的不可约酉表示 (π, V),而且 $n \neq 1$,那么,群同态 $\pi: G \to SU(n)$ 的微分将 $\mathfrak{g}_0$ 单一地映射到 $SU(n)$. 这样 $SU(n)$ 的 Killing 型诱导出 $\mathfrak{g}_0$ 上的一个 G 不变而且是负定的二次型. 因为 $\mathfrak{g}_0$ 是单李代数,它的 G 不变二次型与它的 Killing 至多相差一个常数倍. 由于 G 不是紧的, $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 不可能是正定或负定的,这就得出了一个矛盾. 因此, G 存在有限维非平凡酉表示的假设不能成立,命题证毕.

从现在起我们设 G 是一个非紧的线性既约群,用 $\mathfrak{g}_0$ 表示 G 的李代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 表示 $\mathfrak{g}_0$ 的复化. 研究 G 的无穷维表示首先碰到的问题是这些表示都是一族一族的接近等价的表示. 为了说明这一点,我们先以最简单的非紧李群 $SL(2, \mathbb{R})$ 为例. 设 λ 是一个复数,令 D_λ 为定义在 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上的次数为 $\lambda - 1$ 的齐次偶函数所组成的空间. 那么 $SL(2, \mathbb{R})$ 在这个空间 D_λ 的作用是 $(\pi_\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$,这里的 $f \in D_\lambda, g \in G, x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. 为了将这个作用具体化为 $SL(2, \mathbb{R})$ 的表示,需要确定什么样的函数应该构成我们所考虑的 Hilbert 空间. 我们可以取局部平方可积函数,也可以取其他类型的函数,例如 L^p 空间中的函数或 Sobolev 空间中的函数.

显然这些不同的函数空间给出互不等价的群的表示,但是直觉上这些表示又都是"某个表示"的不同的解析形式.

Harish - Chandra 找到了解决这个问题的一个途径. 设线性既约群 G 的极大紧子群为 K,设 (π, V) 为 G 的表示, Hilber 空间 V 中的一个向量 v 称为是 K—有限的,如果 $\pi(K)V$ 的线性组合生成一个有限维空间. 当 K 在 V 上的作用都是酉算子时,我们可以把 G 的作用限制在 K 上,得出 V 的下列分解:

$$\pi|_K \cong \sum_{\tau \in \hat{K}} n_\tau \tau,$$

这里的 $\hat{K}$ 是指 K 的不可约酉表示的等价类，n_τ 是指 τ 在 v 中出现的重数，n_τ 可以是非负整数或者是 $+\infty$. 我们称 π 是可容许的表示，如果 $\pi(K)$ 的作用都是酉算子而且对每一个 $\tau \in \hat{K}$，重数 n_τ 都是有限的.

给定 G 的一个可容许的表示 (π, V)，我们用 V_f 表示 V 中所有 K—有限的向量构成的子空间. 这个子空间 V_f 并不是 G 的表示，但是它具有 K 和复化李代数 $\mathfrak{g}$ 的作用，这两个作用是相容的，也就是

$\pi(k)\pi(X)\pi(k^{-1})v = \pi(ad(k)X)v$, $\forall k \in K, X \in \mathfrak{g}$, $v \in V_f$. Harish - Chandra 证明了任何不可约酉表示都是可容许的表示.

我们现在定义纯代数的 $(\mathfrak{g}, K)$—模的概念，这是一个线性空间 E 具备 $\mathfrak{g}$ 和 K 的相容的作用. 一个 $(\mathfrak{g}, K)$—模 E 称为是可容许的，如果作为 K 的表示，每个不可约表示因子出现的重数都是有限的. 一个可容许的 $(\mathfrak{g}, K)$—模也常常称为 Harish - Chandra 模. 显然地，如果 V 是 G 的一个可容许表示，那么 V_f 是一个 Harish - Chandra 模. 可以证明所有的不可约的 $(\mathfrak{g}, K)$—模都是可容许的.

我们称 G 的两个可容许表示 (π, V) 与 (π', V') 是微元等价的，如果它们相应的 $(\mathfrak{g}, K)$—模是等价的. 从微元等价并不能得出群的表示是等价的. 但是，可以证明两个酉表示若是微元等价的，那么它们也一定是酉等价的.

Schur 引理 设 (π, V) 是线性既约群 G 的一个不可约表示，设 V_f 是 V 中 K—有限的向量组成的子空间. 如果 $A: V_f \to V_f$ 是一个与 $\pi(\mathfrak{g})$ 都交换的线性算子，那么 A 一定是数乘算子.

证明 首先算子 A 与 $\pi(K)$交换,我们可以通过指数映射得出 A 与 $\pi(K)$交换. 因此,A 将互不等价的 K 的不可约表示映射到自身. 因为 π 是可容许的表示,每个 K 的互不同构,不可约表示只出现有限次,这些在 V_f 中互相等价的不可约表示的直和是有限维的,所以 A 有某个特征值 λ. 那么线性算子 $A-\lambda I$ 与 $\pi(\mathfrak{g})$交换而且有非零的核,这个核也是 $\mathfrak{g}$ 不变的. 又因为 π 是不可约表示,所以 $A-\lambda I$ 一定是 V_f 上的零算子,这就证明了 A 是数乘算子.

§11.2 $SL(2,\mathbb{R})$的不可约$(\mathfrak{g},K)$—模

$SL(2,\mathbb{R})$是最简单的非紧李群. 研究线性既约群表示的一个十分重要的方法就是约化到 3 维子群的问题,这些 3 维子群都同构于 $SL(2,\mathbb{R})$. 在这一节我们设 $G=SL(2,\mathbb{R})$,其李代数 $\mathfrak{g}_0=sl(2,\mathbb{R})$,复化李代数 $\mathfrak{g}=sl(2,\mathbb{C})$. G 的极大紧子群 $K=so(2)$. 正如我们在上一节中提到的,我们要通过了解不可约$(\mathfrak{g},K)$—模的结构来研究 $SL(2,\mathbb{R})$的不可约可容许表示.

我们先选定 $\mathfrak{g}$ 的一组基:

$$\begin{aligned} H&=-i\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\\ X&=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right],\\ Y&=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right].\end{aligned}\tag{11.2a}$$

这组基满足下列关系

$$[H,X]=2X,\quad [H,Y]=-2Y,[X,Y]=2H.$$

设(π, V)是一个$(\mathfrak{g}, K)$—模，并且有下列 K 型分解

$$V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n,$$

其中 V_n 是 K 不变子空间，使得对任意 $v\in V_n$，$k_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in K$ 都有

$$\pi(k_\theta)v=e^{in\theta}v. \tag{11.2b}$$

如果 $v\in V_n$，我们就能得出

$$\pi(H)v=nv,\pi(X)v\in V_{n+2},\pi(Y)v\in V_{n-2}.$$

这里的第一个等式是对(11.2b)微分得到，第二个等式是根据

$$\begin{aligned}\pi(H)\pi(X)v &=\pi(X)\pi(H)v+\pi([H,X])v\\ &=(n+2)\pi(X)v,\end{aligned}$$

第三个等式是根据

$$\begin{aligned}\pi(H)\pi(Y)v &=\pi(Y)\pi(H)v+\pi([H,Y])v\\ &=(n-2)\pi(Y)v.\end{aligned}$$

我们考虑在通用包络代数 $U(\mathfrak{g})$中的一个元素

$$\omega=(H+1)^2+4YX=(H-1)^2-4XY.$$

利用$\{H,X,Y\}$的换位关系不难验证

$$[X,\omega]=[Y,\omega]=[H,\omega]=0.$$

换言之，ω 是$U(\mathfrak{g})$的中心 $z(\mathfrak{g})$中的元素．因此，由 Schur 引理得出 ω 在任何不可约$(\mathfrak{g},K)$—模的作用都是数乘算子．我们选定这个常数的一个平方根 λ．设 $v\in V_n$，那么 $\pi(\omega)=\lambda^2v$，并且 $\pi(H)v=nv$. 再根据 ω 的定义就能得出

$$\pi(XY)v=\frac{1}{4}(\lambda^2-(n-1)^2)v,$$

$$\pi(YX)v=\frac{1}{4}(\lambda^2-(n+1)^2)v. \tag{11.2c}$$

引理 设(π,V)是一个不可约$(\mathfrak{g},K)$—模．设 $v\in V_n$ 是一个非零向量．

(i)如果 $\pi(X)v=0$，那么 V 是由 $w_{n-2m}=\pi(Y)^m v(m=$

$0,1,2,\cdots$)线性生成;特别地,$V_{n+2}=0$.

(ii)如果 $\pi(Y)v=0$,那么 V 是由 $w_{n+2m}=\pi(Y)^m v$($m=0,1,2,\cdots$)线性生成;特别地 $V_{n-2}=0$.

(iii)如果 $\pi(XY)v=0$,那么 $\pi(Y)v=0$.

(iv)如果 $\pi(YX)v=0$,那么 $\pi(X)v=0$.

证明 我们先来证明(i). 设 w 是由$\{w_{n-2m}=\pi(Y)^m v \mid m=0,1,2,\cdots\}$线性生成的空间. 那么 w 是一个 $\mathfrak{g}$ 不变子空间,这是因为由定义它首先是 $\pi(Y)$不变的;再者因为 $w_{n-2m}=\pi(Y)^m v\in V_{n-2m}$,所以

$$\pi(H)w_{n-2m}=(n-2m)w_{n-2m};$$

最后根据假设

$$\pi(X)w_n=\pi(X)v=0\in W,$$

而且对任意 $m>0$ 根据(11.2c)

$\pi(X)w_{n-2m}=\pi(XY)w_{n-2(m-1)}=c\cdot w_{n-2(m-1)}\in W$,其中 c 是一个常数. 这个子空间 W 一定是非零的,因为 $v\in W$. 根据 V 是不可约的,我们得出 $V=W$. 这就证明了(i),我们可以用同样的方法证明(ii).

现在设 $\pi(YX)v=0$,但是 $\pi(X)v=v_1\neq0$. 那么 $v_1\in V_{n+2}$而且 $\pi(Y)v_1=\pi(YX)v=0$. 利用(ii)我们得出 $V_{(n+2)-2}=V_n=0$,这与 $V_n\neq0$ 的假设相矛盾. 这就证明了(iii),我们可以用相同的方法证明(iv).

命题 设(π,V)是一个不可约$(\mathfrak{g},K)$—模,选定 $\pi(\omega)$的一个平方根 λ. 设 $V_n\neq0$,v 是V_n 中一个非零向量,定义

$w_n=v$,

$$w_{n+2(m+1)}=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda+(n+2m+1)}\pi(X)w_{n+2m}, & \\ \qquad\qquad 若\ \lambda\neq-n-2m-1; & \\ 0, \qquad 若\ \lambda=-n-2m-1, & \end{cases}\qquad(11.2d)$$

$$w_{n-2(m+1)}=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda-(n-2m+1)}\pi(X)w_{n-2m}, \\ \qquad\qquad 若\ \lambda\neq n-2m-1; \\ 0, \qquad 若\ \lambda=n-2m-1.\end{cases}$$

设上式定义的 w_j 为非零向量,那么

$$\pi(H)w_j=j\cdot w_j,$$

$$\pi(X)w_j=\frac{1}{2}(\lambda+(j+1))w_{j+2}, \tag{11.2e}$$

$$\pi(Y)w_j=\frac{1}{2}(\lambda-(j-1))w_{j-2}.$$

因此,所有非零的 w_j 构成 V 的一组基.

证明 根据定义 w_j 或者是 $\pi(X)^{\frac{1}{2}(j-n)}v$ 乘以常数或者是 $\pi(Y)^{\frac{1}{2}(n-j)}v$ 乘以常数,因此 $w_j\in V_j$. 这样就得出 $\pi(H)w_j=j\cdot w_j$.

为了证明 $\pi(X)w_j=\frac{1}{2}(\lambda+(j+1))w_{j+1}$,我们先考虑 $j\geqslant n$ 的情形,这时可以把 j 写成 $j=n+2m(m\geqslant 0)$,如果 $-\lambda\neq n+2m+1$,那么这个等式就是(11.2d)中的定义;如果 $-\lambda=n+2m+1$,那么根据(11.2c)

$$\pi(YX)w_{n+2m}=\frac{1}{4}(\lambda^2-(n+2m+1)^2)w_{n+2m}=0\ .$$

因此,由上面引理的第(iv)条得出 $\pi(X)w_{n+2m}=0$,所以上述等式在 $j\geqslant n$ 的情况下是正确的. 我们再考虑 $j<n$ 的情形,这时 j 可以写作 $j=n-2m-2\ (m\geqslant 0)$,若有 $\lambda\neq n-2m-1$,那么根据(11.2d)的定义

$$\begin{aligned}&\pi(X)w_{n-2m-2}\\&=\pi(X)\pi(Y)\frac{2}{\lambda-(n-2m-1)}w_{n-2m}\\&=\frac{1}{4}(\lambda^2-(n-2m-1)^2)\frac{2}{\lambda-(n-2m-1)}w_{n-2m}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda+(n-2m-1))w_{n-2m}$$
$$=\frac{1}{2}(\lambda+(j+1))w_{j+2};$$

若有 $\lambda=n-2m-1$,那么 $w_{n-2m-2}=0$,上述等式总是成立的．这样就证明了等式 $\pi(X)w_j=\frac{1}{2}(\lambda+(j+1)w_{j+2}$.

另一个等式 $\pi(Y)w_j=\frac{1}{2}(\lambda-(j-1))w_{j-2}$可以用相同的方法证明.

推论 在上面命题的假设下,对任意 $m\geqslant 0$,我们有

(i) $V_{n+2(m+1)}=0$ 当且仅当 $V_{n+2m}=0$ 或者 $\lambda=\pm(n+2m+1)$.

(ii) $V_{n-2(m+1)}=0$ 当且仅当 $V_{n-2m}=0$ 或者 $\lambda=\pm(n-2m-1)$.

证明 我们先来证明(i)．不妨假设 $w_{n+2m}\neq 0$,否则由(11.2d)中的定义可以得出 $w_{n+2(m+1)}=0$．如果 $\lambda=-(n+2m+1)$,那么根据(11.2d) $w_{n+2(m+1)}=0$．如果 $\lambda\neq-(n+2m+1)$,那么 $w_{n+2(m+1)}$是 $\pi(X)w_{n+2m}$的倍数,所以

$$\pi(X)w_{n+2m}=0\Leftrightarrow\pi(YX)w_{n+2m}=0\quad(\text{根据引理中(iv)})$$
$$\Leftrightarrow(\lambda^2-(n+2m+1)^2)w_{n+2m}=0$$
$$(\text{根据(11.2}c\text{)})$$
$$\Leftrightarrow\lambda^2-(n+2m+1)^2=0.$$

这就证明了(i)．我们可以用相同的方法证明(ii).

上述命题与推论完全刻画了不可约($\mathfrak{g},K$)—模的结构．一个不可约的($\mathfrak{g},K$)—模(π,V)由 $\pi(\omega)$和某一个不为零的 K 型 V_n 完全确定．我们定义 V 的极小K 型为正数H 使得 $V_\mu\neq 0$,而且$|\mu|$取最小可能的值．我们将上面得到的结果按极小 K

型重新组织成下面的定理.

定理 设(π, V)是不可约$(\mathfrak{g}, K)$—模,其最小K型为μ,$\pi(\omega)$的作用为$\lambda^2(\lambda\in\mathbb{C})$.

(i)设$|\mu|=n>1$,那么$\pi(\omega)=(n-1)^2$,而且V的K型为$\{\mu+2\mathrm{Sgn}(\mu)m \mid m=0,1,2,\cdots\}$.特别地,$V$的结构由$\mu$完全确定.我们称这样的$V$为离散列表示.当$\mu>1$时,这个表示记为$D_n^+$;当$\mu<1$时,这个表示记为$D_n^-$.

(ii)设$|\mu|=1$,这时有以下三种情形:

(ii-a)若$\lambda=0$,那么V的K型是$\{\mu+2\mathrm{sgn}(\mu)m \mid m=0,1,2,\cdots\}$.这样的$V$被称为极限离散列表示.当$\mu=1$时,这个表示记为$D_1^+$;当$\mu=-1$,这个表示记为$D_1^-$.

(ii-b)若λ是一个非零的偶数,无妨设$\lambda=2m(m>0)$,那么V的K型是$\{-(2m-1),-(2m-3),\cdots,-1,1,\cdots,2m-3,2m-1\}$.这时$V$是一个$2m$维的不可约表示.

(ii-c)若λ不是偶数;那么V的K型是所有奇数$\{\cdots,-3,-1,1,3,\cdots\}$.我们称之为主列表示,记为$P_\lambda^-$.

(iii)设$\mu=0$,这时有两种情形:

(iii-a)若λ是奇数,无妨设$\lambda=2m+1(m\geqslant 0)$,那么$V$的$K$型为$\{-2m,-(2m-2),\cdots,-2,0,2,\cdots,2m-2,2m\}$.这是一个$(2m+1)$维的不可约表示.

(iii-b)若λ不是奇数,那么V的K型为所有偶数$\{\cdots,-2,0,+2,\cdots\}$.我们称之为主列表示,记为$P_\lambda^+$.

证明 我们先考虑$|\mu|=n>1$的情形.不妨设$\mu>1$,而$H<-1$的情况可以作同样的处理.固定V_n中一个非零的向量v,由于n是极小K型,所以$V_{n-2}=0$,因而$\pi(Y)v=0$.根据(11.2c),

$$\pi(\omega)v=(n-1)^2v+4\pi(XY)v=(n-1)^2v.$$

再根据(11.2d)我们得出

$$w_{n-2}=0, w_{n+2m}\neq 0(m=0,1,2,\cdots).$$

这就证明了(i).

我们再来考虑 $\mu=\pm 1$ 的情形．不妨设 $\mu=1$,而 $\mu=-1$ 的情形可以作同样的处理．如果 $\lambda=0$,那么根据(11.2d),

$$w_{-1}=0, w_{1+2m}\neq 0(m=0,1,2,\cdots).$$

如果 $\lambda=2m(m>0)$是偶数,那么根据(11.2d)和(11.2e)可以得出

$$w_{2m+1}=w_{-2(m+1)}=0,$$

而且

$$w_{-(2m-1)}, w_{-(2m-3)}, \cdots, w_{-1}, w_1, \cdots, w_{2m-3}, w_{2m-1}$$

都不为零．如果 λ 不是偶数,那么根据命题 $w_{\pm(1+2m)}$都不为零．这就证明了(ii).

最后让我们来考虑 $\mu=0$ 的情形．如果 $\lambda=2m+1(m\geqslant 0)$是奇数,那么根据(11.2$d$)和(11.2$e$)可以得出

$$w_{\pm(2m+2)}=0,$$

而且

$$w_{-2m}, \cdots, w_{-2}, w_0, w_2, \cdots, w_{2m}$$

都不为零．如果 λ 不是奇数,那么根据命题所有 $w_{\pm 2m}$都不为零．这就证明了(iii).

注 一般的半单李群的不可约可容许表示的完全分类由 Langlands 得到并证明[L]．这个分类被称作 Langlands 分类.

第十二章　幂零轨道与极小表示

§12.1　幂零轨道

设 G 为半单李群,其李代数为 $\mathfrak{g}$．设由 $\mathfrak{g}$ 上的线性泛函组成的对偶空间为 $\mathfrak{g}^*$．设 f 为 $\mathfrak{g}^*$ 中一个元素,那么经过 f 的共轭伴随轨道定义为

$$G_f = G\cdot f \cong G/G_f,$$

其中 G_f 是由 G 中保持 f 不变的元素组成的迷向子群．我们可以用 Killing 型确定一个从 $\mathfrak{g}^*$ 中共伴随轨道到 $\mathfrak{g}$ 中伴随轨道的一一对应．这里的伴随轨道自然是指 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用所生成的轨道．

本章中我们只考虑复单李群 G 的幂零伴随轨道,我们简称为幂零轨道,这是由 $\mathfrak{g}$ 中幂零元素生成的轨道．幂零元素是指那些满足 $ad(x)^k=0$(k 为某个正整数)的元素．我们研究典型群的幂零轨道．设 G 为复单李群,而且 G 是典型群,那么 G 的幂零轨道由一些划分确定:

1)设与 G 对应的 Dynkin 图为 A 类,例如 $G=SL(n,\mathbb{C})$,那么其幂零轨道与 n 的划分一一对应;

2)设与 G 对应的 Dynkin 图为 B 或 D 型,例如 $G=$

$SO(n,\mathbb{C})$,那么其幂零轨道与那些满足条件偶数部分重数都是偶数的 n 的划分一一对应;

3)设与 G 对应的 Dynkin 图为 C 类,例如 $G=Sp(2n,\mathbb{C})$,那么其幂零轨道与那些满足条件奇数部分重数都是偶数的 n 的划分一一对应.

注 1) $sl(n,\mathbb{C})$中的幂零元素的共轭类由其 Jordan 标准型惟一确定,由此得出,$sl(n,\mathbb{C})$中的幂零轨道由 n 的划分确定.

2) 为了解释其他情形,我们要引用 Jacobson - Morozov 定理. 这个定理指出,$\mathfrak{g}$ 中幂零轨道与 $\mathrm{Hom}(sl(2,\mathbb{C}),\mathfrak{g})$的共轭类一一对应. 也就是说,$\mathfrak{g}$ 中幂零轨道与 $sl(2,\mathbb{C})$到 $\mathfrak{g}$ 的同态等价类一一对应. 例如,根据此定理 $sl(2,\mathbb{C})$中的幂零轨道与 $sl(2,\mathbb{C})$的 n 维表示的等价类一一对应. 因为 $sl(2,\mathbb{C})$的有限维表示是完全可约的,所以 $sl(2,\mathbb{C})$的 n 维表示一定是一些不可约表示的直和. 又因为 $sl(2,\mathbb{C})$的有限维不可约表示由其维数完全确定, 所以 $sl(2,\mathbb{C})$的 n 维表示的等价类由 n 的划分完全确定. 这样再次得出 $sl(n,\mathbb{C})$的幂零轨道由 n 的划分来确定.

3) 应用 Jacobson - Morozov 定理,我们得出 $so(n,\mathbb{C})$的幂零轨道与 $sl(2,\mathbb{C})$的 n 维表示等价类中那些保持一个对称二次型的一一对应. 这个附加条件恰好对应于 n 的划分中偶数部分的重数必为偶数.

4) 同样地,$Sp(2n,\mathbb{C})$中幂零轨道与 $sl(2,\mathbb{C})$的 $2n$ 维表示等价类中那些保持一个反对称二次型的一一对应. 这个附加条件恰好对应于 $2n$ 的划分中奇数部分的重数必为偶数.

我们接下来讨论的许多情形都是典型复单李代数 $so(n,\mathbb{C})$和 $Sp(2n,\mathbb{C})$的幂零轨道. 设 $\varepsilon=\pm 1$,令$\langle,\rangle_\varepsilon$ 为定义在$\mathbb{C}^n$上的一个非退化二次型,并满足以下条件:当 $\varepsilon=1$ 时,$\langle,\rangle_\varepsilon$ 是对称的;当

$\varepsilon=-1$ 时，$\langle,\rangle_\varepsilon$ 是反对称的．我们定义

$$G_\varepsilon=\{A\in GL(n,\mathbb{C})\mid\langle Au,Av\rangle_\varepsilon=\langle u,v\rangle_\varepsilon,\ \forall\, u,v\in\mathbb{C}^n\};$$

$$\mathfrak{g}_\varepsilon=\{X\in gl(n,\mathbb{C})\mid\langle Xu,v\rangle_\varepsilon=-\langle u,Xv\rangle_\varepsilon,\ \forall\, u,v\in\mathbb{C}^n\}.$$

也就是说，G_ε 是保持 $\langle,\rangle_\varepsilon$ 的等距子群，$\mathfrak{g}_\varepsilon$ 是 G_ε 的李代数．我们用 $P_\varepsilon(n)$ 表示满足以下条件的 n 的划分的集合：当 $\varepsilon=1$ 时，偶数部分的重数必为偶数；当 $\varepsilon=-1$ 时，奇数部分的重数必为偶数．综上所述，我们得出下面的定理．

定理 G_ε 的幂零轨道与 $P_\varepsilon(n)$ 中元素一一对应．

在所有幂零轨道中，有一类在表示论中占据着特殊的地位．设 B 为 G 的解析子群，满足其子李代数为由 Cartan 子代数和所有正根子空间所生成．这样的子群 B 称为 Borel 子群．我们要特别提到的这类幂零轨道正是包含一个由 Borel 子群 B 的开集轨道的 G 的幂零轨道．这样的含有 B 的开集轨道的幂零轨道称为是球型幂零轨道．设 $R(\Theta)$ 为幂零轨道 Θ 上所有多项式函数生成的环，那么球型幂零轨道恰好是那些 $R(\Theta)$ 中 G 的表示的重数都不超过 1 的轨道．

如果 G 是 $so(n,\mathbb{C})$，那么 G 的球型幂零轨道与下列 n 的划分一一对应：$[3,2^{2k},1^{n-4k-3}]$ $(k=0,1,\cdots,[\frac{n-3}{4}])$ 或者 $[2^{2k},1^{n-4k}]$ $(k=0,1,\cdots,[\frac{n}{4}])$．

如果 G 是 $Sp(2n,\mathbb{C})$，那么 G 的球型幂零轨道与 n 的划分 $[2^k,1^{2n-2k}]$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 一一对应．

在所有非零的幂零轨道中维数最小的称为极小轨道．每个复单李群 G 都有惟一的极小轨道 Θ_0．设 β 为 $\mathfrak{g}$ 的最高根，X_β 为根子空间 $\mathfrak{g}_\beta$ 中的一个非零向量，那么极小轨道 $\Theta_0=G\cdot X_\beta$．作为 G 的表示由 Θ_0 上多项式函数组成的环 $R(\Theta_0)$ 同构于

$\bigoplus_{n=0}^{\infty} V(n\beta)$,其中 $V(n\beta)$是最高权为 $n\beta$ 的不可约表示．因此，极小轨道是球型幂零轨道．对于典型群来说,极小轨道 Θ_0 对应的划分为$[2^a, 1^{n-2a}]$,其中

$$\begin{cases} a=1,\text{如果 } G \text{ 属于} A \text{ 或} C \text{ 类;} \\ a=2,\text{如果 } G \text{ 属于} B \text{ 或} D \text{ 类.} \end{cases}$$

命题　设 p 为所有正根之和的一半．那么，

$$\dim\Theta_0 = 2\langle\rho, \beta\rangle.$$

证明　定义 $\mathfrak{g}$ 中子代数

$$\mathfrak{g}_1 = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, X_\beta] = 0\}.$$

那么 $\dim\Theta_0 = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}_1$．设 $\mathfrak{g}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{y} + \sum_{\alpha\in\Phi+} \mathbb{C}X_\alpha + \sum_{\alpha\in\Phi\alpha} \mathbb{C}X_{-\alpha}.$$

显然地，对于任意一个正根 α 都有 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_1$ ．若 $H \in \mathfrak{y}$,则有$[H, X\beta] = \beta(H)X\beta$ ．因此,$\mathfrak{g}_1$包含了 $\mathfrak{y}$ 中维数为 1 的一个子空间．设 $\alpha \in \Phi^+$ 而且 $\alpha \neq \beta$,那么 $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_1$当且仅当 $\beta - \alpha$ 不是一个根．换言之,$X_{-\alpha} \notin \mathfrak{g}_1$ 当且仅当$(\alpha, \beta) \neq 0$ ．因为 β 是一个长根,这个条件等价于$\langle\alpha, \beta\rangle = \dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 1$ ．由此得出

$$\begin{aligned}
\dim\mathfrak{g}_1 &= \dim \sum_{\alpha\in\Phi+} \mathbb{C}X_\alpha + \dim\mathfrak{y} - 1 + \sum_{\substack{\alpha\in\Phi+ \\ \alpha\neq\beta}} (1 - \langle\alpha, \beta\rangle) \\
&= \dim\mathfrak{g} - 1 - \sum_{\alpha\in\Phi+} \langle\alpha, \beta\rangle + 1 \\
&= \dim\mathfrak{g} - \sum_{\alpha\in\Phi+} \langle\alpha, \beta\rangle.
\end{aligned}$$

这就得到 $\dim\Theta_0 = \sum_{\alpha\in\Phi+} \langle\alpha, \beta\rangle = 2\langle\rho, \beta\rangle$.

下面的图表列出每个复单李代数中极小轨道的维数：

$\mathfrak{g}$	$\dim\Theta_0$
$sl(n,\mathbb{C})$	$2(n-1)$
$so(n,\mathbb{C})$	$2(n-3)$
$sp(2n,\mathbb{C})$	$2n$
$\mathfrak{g}_2$	6
$\mathfrak{f}_4$	16
$\mathfrak{e}_6$	22
$\mathfrak{e}_7$	34
$\mathfrak{e}_8$	58

注 幂零轨道对于研究李群的不可约酉表示的分类十分重要([HL],[Ki],[Ko],[V4]).

§12.2 极小表示

设 $\mathfrak{g}$ 为复单李代数. 设 G 为单连通的李代数为 $\mathfrak{g}$ 的复李群.设 K 为 G 的极大紧子群,K 同构于 G 的紧实型. 我们定义 G 的球型表示为具有非零的 K 不动向量的表示. 我们首先描述 G 的不可约球型表示的$(\mathfrak{g},K)$—模.

设 $U(\mathfrak{g})$为 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数. 我们先定义 $U(\mathfrak{g})$上的两个反自同态. 我们用 $\mathfrak{t}$ 来表示 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数,前面常常用到的 $\mathfrak{h}$ 将留在下节中表示共有轨道对$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$中的 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数. 定义在 $\mathfrak{t}$ 上数乘 -1 的映射诱导出根系的一个自同构,因此存在 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构 σ,使得 $\sigma X=-X$ 对所有 $X\in\mathfrak{t}$ 都成立. 我们定义

$$X^v = -X, \quad {}^tX = -\sigma X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

以上定义的 $\mathfrak{g}$ 上的两个反自同构都可以惟一地扩充为 $u(\mathfrak{g})$的反自同构,扩充的定义如下:对任意的 $X_1,\cdots,X_n \in \mathfrak{g}$,

$$(X_1\cdots X_n)^v = (-1)^n X_n\cdots X_1,$$

$${}^t(X_1\cdots X_n) = {}^tX_n\cdots {}^tX_1 .$$

设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的复化. 我们用 j 来表示由复化而来的数乘 -1 的作用,用 i 表示 $\mathfrak{g}$ 上原有的复结构. 这样 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 可以写成两个理想的直和 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^L \times \mathfrak{g}^R$,其中

$$\mathfrak{g}^L = \left\{ \frac{1}{2}(X + jiX) \mid X \in \mathfrak{g} \right\},$$

$$\mathfrak{g}^R = \left\{ \frac{1}{2}(X - jiX) \mid X \in \mathfrak{g} \right\}.$$

我们可以用下列映射确定 $\mathfrak{g}^L$ 和 $\mathfrak{g}^R$ 与 $\mathfrak{g}$ 的同构:

$$\varphi^L(X) = \frac{1}{2}(X + jiX), \varphi^R(X) = \frac{1}{2}(-{}^t\overline{X} + ji{}^t\overline{X}), X \in \mathfrak{g} .$$

上面的 $\overline{X}$ 是指 $\mathfrak{g}$ 关于其极大紧子代数 $\mathbf{k}$ 的共轭. 这样就有,

$$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cong U(\mathfrak{g}^L) \otimes U(\mathfrak{g}^R) \cong U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}).$$

极大紧子代数 k 的复化kc 同构于 $\mathfrak{g}$,这个同构是

$$\varphi^D(X) = \varphi^L(-{}^tX) + \varphi^R(x), X \in \mathfrak{g} .$$

设 J 为 $U(\mathfrak{g})$ 的双边理想,我们可以按以下定义得到一个$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$—模 $u(\mathfrak{g})/J$,

$$(a \times b)\cdot(v + J) = {}^ta^V \cdot v \cdot b^V + J, v \in U(\mathfrak{g}).$$

设 $X = \varphi^D(Y) = \varphi^L(-{}^tY) + \varphi^R(Y)$在 k 的复化之中,那么

$$X\cdot(u + J) = Yu - uY + J, u \in U(\mathfrak{g}).$$

这个作用是 K 的作用的微分. 这就得出$1 + J$是一个非零的K不变向量,也就是说 $U(\mathfrak{g})/J$ 是一个球型$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$—模. 如果 J 又是极大理想, 那么 $U(\mathfrak{g})J$ 则是一个不可约球型$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$—模.因此,存在一个$U(\mathfrak{g})$中双边极大理想到不可约球

型$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)$—模的一一对应.

设 J 为 $U(\mathfrak{g})$的双边理想. 我们定义 J 的特征簇如下:设 $U_n(\mathfrak{g})$为不超过 $\mathfrak{g}$ 的 n 个元素相乘所得元素生成的 $U(\mathfrak{g})$的子空间. 那么 $V(\mathfrak{g})$就有一个上升的过滤

$$\mathbb{C}=U_0(\mathfrak{g})\subseteq U_1(\mathfrak{g})\subseteq U_2(\mathfrak{g})\subseteq\cdots,$$

而且满足 $U_p(\mathfrak{g})\cdot U_q(\mathfrak{g})\subseteq U_{p+q}(\mathfrak{g})$. 根据 Poincare-Birkhoff-Witt 定理,其相应的分次代数与 $S(\mathfrak{g})$同构. 这里的 $S(\mathfrak{g})$是 $\mathfrak{g}$ 的多项式代数. 上述过滤同时诱导了双边理想 J 上的一个分次结构,其相应的分次理想 grJ 是 $U(\mathfrak{g})$的双边理想. J 的特征簇定义为

$$\{X\in\mathfrak{g}^*\mid f(x)=0,\forall f\in\bar{g}rJ\}.$$

下面的命题是由 Joseph [J2]证明的.

命题 如果复单李代数 $\mathfrak{g}$ 不与 $sl(n,\mathbb{C})$同构,那么 $u(\mathfrak{g})$有一个惟一的极大双边理想 J_0,使得 J_0 的特征簇为 $\Theta_0\cup\{0\}$.

注 1) 这个双边理想 J_0 称为 Joseph 理想.

2) 如果 $\mathfrak{g}\cong sl(n,\mathbb{C})$,我们也可以找到 $u(\mathfrak{g})$的极大双边理想 J_0,使得 J_0 的特征簇为 $\Theta_0\cup\{0\}$. 但是,这个 J_0 不是惟一的.为方便起见,我们也同样地为 $sl(n,\mathbb{C})$定义惟一的一个J_0. 这个 J_0 是这样定义的,首先我们固定 $SL(n,\mathbb{R})$的一个不可约酉表示 V,这个表示是从其子群 $GL(n-1,\mathbb{R})$的平凡表示诱导出的. 令

$$J_0=\mathrm{Ann}\,V=\{u\in U(\mathfrak{g})\mid u\cdot V=0\}.$$

可以证明这个 J_0 是满足上述条件的 $V(\mathfrak{g})$的极大双边理想.

下面的结果是由 D. Garfinkle [Ga]证明的.

命题 我们定义 $V_{\min}=U(\mathfrak{g})/J_0$. 这是一个 G 的表示的$(\mathfrak{g},K)$—模,把它限制在 K 上得到

$$\mathrm{Res}_K^G V_{\min} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V(n\beta).$$

我们称这个表示为复单李群 G 的极小表示.

定理 G 的极小表示是酉表示.

这个定理的证明可以在[H2]中找到.

§12.3 共有轨道与对偶对的对应

设 G 为单连通的复单李群,设 H 为 G 的单子群. 我们分别用 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 表示 G 和 H 的李代数. Brylinski 和 Kostant 找出了所有的 (G,H) 对,使得 G 和 H 具有共同的伴随轨道. 所谓 G 与 H 具有共同的轨道,是指存在着 G 的轨道 Θ 和 H 的轨道 Θ',而且 Θ 中包含了一个 H 的轨道 Θ°,这个 H 的轨道 Θ° 是 Θ' 的 H 等变覆盖. Brylinski 和 Kostant 证明了如果 G 与 H 具有共同轨道,那么 G 的极小轨道 Θ_0 一定是其中的共有轨道. 下面的定理列出了所有复单李代数对 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$,使得 $\mathfrak{g}$ 的极小轨道是共有轨道,这个结果是 Brylinski 和 Kostont 证明的[BK].

定理 下面的图表列出了所有的复单李代数对 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$,使得它们具有共有轨道对 (Θ_0,Θ_1). 其中 Θ_0 是 $\mathfrak{g}^*$ 中的极小幂零共伴随轨道,Θ_1 是 $\mathfrak{g}^*$ 中的幂零共伴随轨道,如果把由 $\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ 的嵌入诱导出的转矩映射 $\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{h}^*$ 限制在 Θ_0 包含的某个 H 轨道 ${\Theta^{\circ}}_0$ 的开子集上,我们就得到了 ${\Theta^{\circ}}_0\to\Theta_1$ 的通用覆盖,而且还有 $\mathfrak{h}$—模分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus V$.

	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	V	$\pi_1(\Theta_1)$
(1)	$so(7)$	G_2	$\mathbb{C}^7$	1
(2)	$so(2n+2)$	$so(2n+1)$	$\mathbb{C}^{2n+1}$	$\mathbb{Z}_2$
(3)	$sl(2n)$	$sp(2n)$	$\mathbb{C}^{2n}/\mathbb{C}$	$\mathbb{Z}_2$
(4)	E_6	F_4	$\mathbb{C}^{26}$	$\mathbb{Z}_2$
(5)	G_2	$sl(3)$	$\mathbb{C}^3 \oplus \Lambda^2 \mathbb{C}^3$	$\mathbb{Z}_3$
(6)	$so(2n+1)$	$so(2n)$	$\mathbb{C}^{2n}$	$\mathbb{Z}_2$
(7)	F_4	$so(9)$	$\mathbb{C}^{16}$	$\mathbb{Z}_2$
(8)	F_4	$so(8)$	$\mathbb{C}^8 \oplus \mathbb{C}^8 \oplus \mathbb{C}^8$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
(9)	$so(8)$	G_2	$\mathbb{C}^7 \oplus \mathbb{C}^7$	S_3

设$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$为一个上述定理中拥有共有轨道的一对李代数．设$(G,H)$为相应的复单李群．我们将 G 的极小表示 $V_{\min}$限制在 $H\times\pi_1(\Theta_1)$上，就得到如下分解．

定理 [H2] $\mathrm{Res}^G_{H\times\pi_1(\Theta)_1} V_{\min} = \bigoplus_{\sigma\in\pi_1(\Theta_1)^\wedge} V_\sigma \otimes F_\sigma$.

这里 $\pi_1(\Theta_1)^\wedge$ 表示 Θ_1 基本群的不可约表示的等价类，F_σ 是相应于$\sigma\in\pi_1(\Theta_1)^\wedge$的表示空间，而 V_σ 是相应的H 的不可约酉表示．

欲知上述定理的证明，请参阅[H2]．

注 典型群中对偶对的对应始于 Howe 的工作[Ho′]．这是研究不可约酉表示的又一重要工具[Li]．这个对应被推广到各种各样的非典型群，请参阅[HPS]．

参考文献

[AH] J. Adams and J.-S. Huang, *Kazhdan/Patterson lifting for $GL(n, \mathbb{R})$*, Duke Math. Journal **89** (1997), 423~444.

[AHV] J. Adams, J.-S. Huang and D. Vogan, *Functions on the model orbit in E_8*, Representation Theory **2** (1998), 224~263.

[Ar] M. Artin, *Algebra*, Prentice-Hall, Inc, 1991.

[B] D. Barbasch, *The unitary dual for complex classical Lie groups*, Invent. math. **96** (1989), 103~176.

[Be] J. Bernstein, *Analytic structures on representation spaces of reductive groups*, Proceedings of ICM 1998, Vol. Ⅱ, Doc. Math. J. DMV, 1998, pp. 519~525.

[BD] T. Bröck and T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, *LNM 98*, Springer-Verlag, 1985.

[BK] R. Brylinski and B. Kostant, *Nilpotent orbits, normality, and hamiltonian group actions*, Journal of the American Mathematical Society **7** (1994), 269~298.

[CMS] R. Carter, I. MacDonald and G. Segal, *Lectures on*

Lie Groups and Lie Algebras, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995.

[C] W. Casselman, *Canonical extensions of Harish-Chandra modules to representations of G*, Can. J. Math. **41** (1989), 385~438.

[CM] D. Collingwood and W. Mc Govern, *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.

[D] M. Duflo, *Représentations unitaires irréducible des groupes simples complexes de rang deux*, Bull. Soc. Math. France **107** (1976), 55~96.

[F-J] *Analysis on Non-Riemannian Symmetric Spaces*, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by American Mathe-matical Society, 1984.

[FH] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*, GTM 129, Springer-Verlag, 1991.

[Ga] D. Garfinkle, *A new construction of the Joseph ideal*, Ph. D. Thesis, MIT (1982).

[GP] V. Gillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., 1974.

[He] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.

[He′] S. Helgason, *Some results on invariant differential operators on symmetric spaces*, Amer. J. Math **114** (1992), 789~811.

[Ho] R. Howe, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, Israel Mathematical Conference Proceedings **8** (1995), 1~182.

[Ho′] R. Howe, *θ-series and invariant theory*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 33, part 1, AMS, Providence, 1979, pp. 275~286.

[H1] J.-S. Huang, *The unitary dual of the universal covering group of GL* (n, $\mathbb{R}$), Duke Math. J. **61** (1990), 705~745.

[H2] J.-S. Huang, *Minimal representations, shared orbits and dual pair correspondences*, IMRN No. **6** (1995), 1~15.

[HL] J.-S. Huang, and J.-S. Li, *Unipotent representations attached to spherical nilpotent orbits*, Amer. J. of Math. **121** (1999), 497~517.

[HPS] J.-S. Huang, P. Pandžić and G. Savin, *New dual pair correspondences*, Duke Math. J. **82** (1996), 447~471.

[HZ] J.-S. Huang and C.-B. Zhu, *Weyl's construction and tensor power decomposition for* G_2, Proceedings of the AMS **127** (1999), 925~934.

[Hu] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[J] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, **II**, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1974, 1980.

[J′] N. Jacobson, *Lie Algebra*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962, 1979.

[Ja] G. James, *Representation Theory of Symmetric Groups*, *LNM 682*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[J1] A. Joseph, *Minimal realizations and spectrum generating algebras*, Commun. math. Phys. 36 (1974), 325～338.

[J2] A. Joseph, *The Minimal orbit in a simple lie algebra and its associated maximal ideal*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4e série, t. 9 (1976), p. 1 à 30.

[Ki] A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, translated by E. Hewitt, Springer-Verlag, Berlin-Heidlberg-New York, 1976.

[K] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, Princeton, 1986.

[K′] A. W. Knapp, *Lie Groups beyond an Introduction*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1996.

[KV] A. W. Knapp and D. A. Vogan, *Cohomological Induction and Unitary Representations*, Princeton University Press, Princeton, 1995.

[Ko] B. Kostant, *Quantization and unitary representations*, Lectures in Modern Analysis and Applications, (C. Taam, ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 170, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[La] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[L] R. P. Langlands, *On the classification of representations of real algebraic groups*, Representation Theory and Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups (P. Sally and D. Vogan, eds.), Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 31, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1989, pp. 101~170.

[Li] J.-S. Li, *Singular unitary representations of classical groups Invent. Math.* **97** (1989), 237~255.

[Ti] J. Tits, *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen*, Springer-Verlag, 1967.

[Va] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*, GTM 102, Springer-Verlag, 1984.

[V1] D. Vogan, *Singular unitary representations*, Noncommutative harmonic analysis and Lie groups, LNM 880, Springer-Verlag, 1981, pp. 506~535.

[V2] D. Vogan, *The unitary dual of GL(n) over an archimedean field*, Invent. Math. **83** (1986), 449~505.

[V3] D. Vogan, *Representations of Real Reductive Groups*, Birkhauser, 1981.

[V4] D. Vogan, *The method of coadjoint orbits for real reductive groups*, IAS/Park City Mathematical Series **6** (1998).

[W] N. Wallach, *Real reductive Groups I*, **II**, Academic

Press, 1988, 1992.

[Wa] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM 94, Springer-Verlag, 1983.

[We] H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton Mathematical Series, third edition, Princeton University Press, 1966.

[Z] D. P. Zelobenko, *Compact Lie Groups and their Representations*, American Mathematical Society, 1973.

[General Information]
书名=李群的表示论
作者=黄劲松著
页数=187
SS号=11540397
DX号=
出版日期=2000年07月第1版
出版社=湖南教育出版社